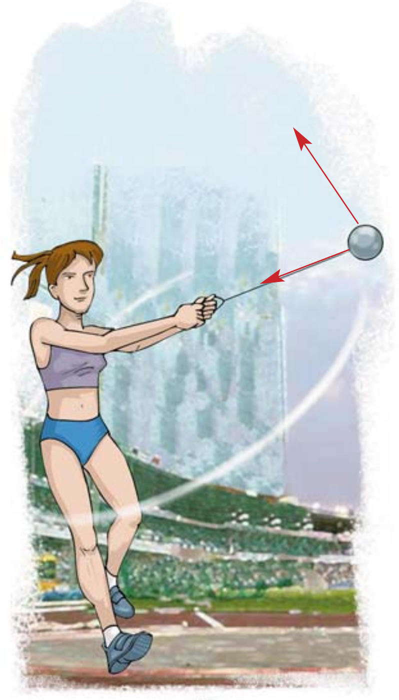
Vectores



Como ya lo mencionamos, en el desarrollo de la prueba olímpica del lanzamiento del martillo se manifiestan diversas fuerzas.

Observa el dibujo donde se ha representado la fuerza centrípeta y la velocidad tangencial que interviene en la velocidad final del martillo.

Analicemos...

- ¿Se puede decir que dos fuerzas son iguales, si las flechas que las representan tienen igual longitud?, ¿por qué?
- ¿Se pueden aplicar dos fuerzas distintas, de modo que la fuerza resultante sea nula? Justifica.
- ¿De qué depende la longitud de la flecha, en cada caso?, ¿y su dirección? Explica.

Una forma de observar cuáles son las fuerzas de que depende la velocidad final del martillo, es utilizar un diagrama en el que se representa la fuerza que actúa sobre él y su velocidad tangencial mediante flechas, lo que permite visualizar cuál es la fuerza resultante y cómo afecta, en este caso, a su velocidad de lanzamiento.

Cuando se representa una fuerza, no basta con señalar su magnitud. Una fuerza tiene también dirección, ya que cuando se aplica en direcciones diferentes provocará distintos efectos. Es así como toda fuerza se puede representar sobre un diagrama utilizando flechas. La dirección de la flecha será la dirección en que se ejerce la fuerza y su longitud debe ser proporcional a la magnitud de esta.

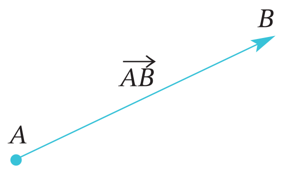
La fuerza, tal como la velocidad y el desplazamiento, es un **vector**.

Un vector se caracteriza por su:

- **módulo**: es el valor numérico de la magnitud vectorial. Se representa gráficamente por la longitud de la flecha.
- **dirección**: está dada por la orientación en el plano o en el espacio de la recta que lo contiene.
- **sentido**: se muestra mediante una punta de flecha situada en el extremo del vector, indicando hacia qué lado de la línea de acción se dirige el vector.

Glosario

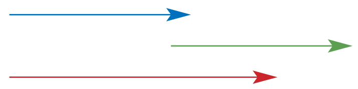
vector: toda magnitud en la que, además de la cantidad, hay que considerar la dirección y el sentido.



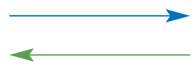
El vector se representa por un segmento orientado con origen en A y extremo en B, se representa por el símbolo $\overrightarrow{AB}$. La distancia entre A y B representa gráficamente el módulo del vector $\overrightarrow{AB}$.

UNIDAD 3 (98-155)C _Maquetación 1 13-07-11 9:25 Página 103

Dos segmentos orientados representan al mismo vector si son paralelos, tienen el mismo sentido y la misma magnitud o módulo sin importar dónde está ubicado su origen. Si alguna de estas condiciones no se cumple, se dice que son **distintos**.



Se dice que dos vectores son **opuestos** si tienen igual módulo y dirección, pero sentido contrario.



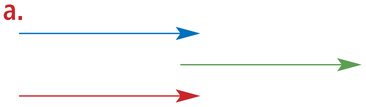
En resumen

- Un **vector** es un objeto matemático caracterizable mediante una magnitud o módulo, una dirección y un sentido.
- Dos vectores son **iguales** solo si son, a la vez, paralelos, con igual sentido y con la misma magnitud o módulo.
- El vector $\vec{0}$ corresponde a un vector, pero de magnitud 0, y sin dirección ni sentido.

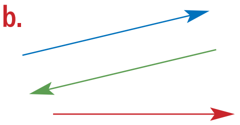
Actividades

1. Determina si los siguientes vectores son iguales, opuestos o distintos, en cada caso. Justifica.

a.

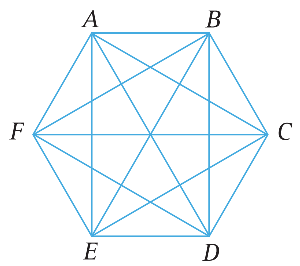


b.



c.

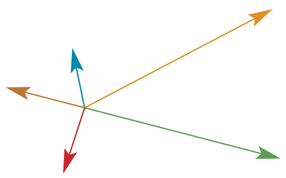
2. La figura $ABCDEF$ es un hexágono regular. Determina:



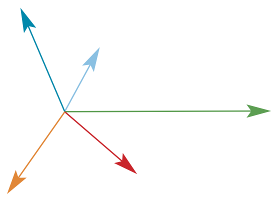
a. dos parejas de vectores con igual sentido, dirección y módulo.
b. Una pareja de vectores de distinta dirección pero con igual módulo.
c. Una pareja de vectores con distinto módulo pero con igual dirección.

3. Determina cuáles de los siguientes vectores tienen igual módulo, en cada caso. Justifica.

a.



b.

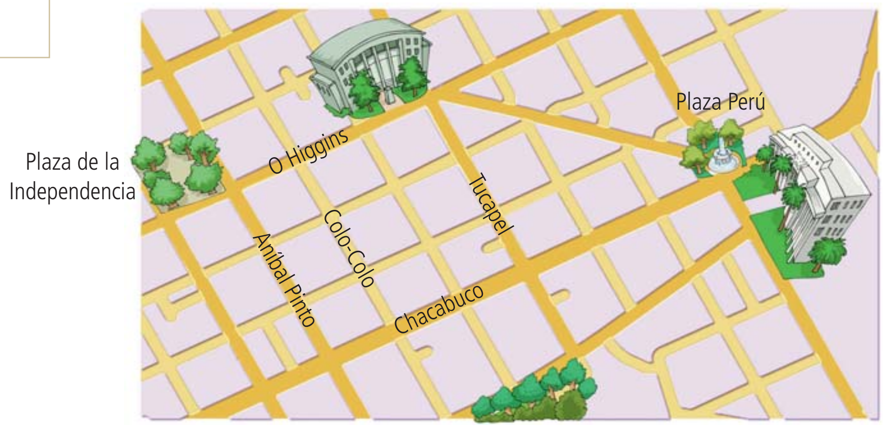


Operatoria con vectores

Glosario

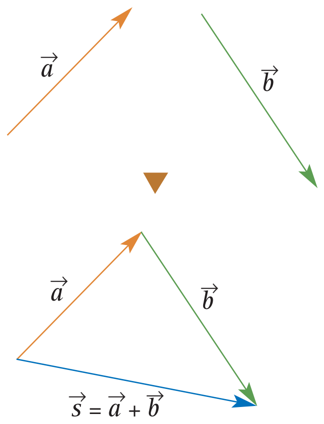
trayectoria: línea descrita en el plano o en el espacio por un cuerpo que se mueve.
desplazamiento: cambio de la posición de un cuerpo.

Observa el siguiente mapa y sigue las **trayectorias** que han hecho Pablo y Andrea, desde la Plaza de la Independencia. Pablo caminó por Aníbal Pinto hasta Chacabuco, y dobló hacia su derecha hasta Colo-Colo. Andrea se fue por O'Higgins hasta llegar a Tucapel.



Analicemos...

- ¿Quién recorrió más?, ¿por qué?
- Ahora, dibuja una flecha que indique el **desplazamiento** de cada uno. ¿Quién se desplazó más? Justifica.
- Más tarde, Pablo y Andrea se reunieron en la Plaza Perú. ¿Cómo se representa el desplazamiento de cada uno?, ¿cuál es su desplazamiento total, en cada caso?



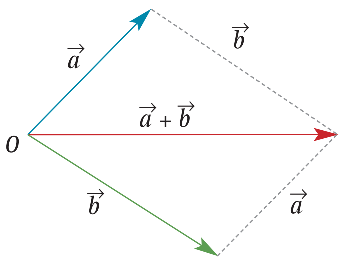
Al igual que la fuerza, el desplazamiento es un vector, ya que es la diferencia entre una posición inicial y una posición final; luego tiene magnitud y también dirección y sentido. En cambio, la trayectoria tiene magnitud, pero no dirección. Para sumar dos o más trayectorias, basta sumar sus magnitudes. Pero, para sumar desplazamientos, su suma depende de la dirección de los desplazamientos. Observa.

Una forma de calcular el vector suma $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$ es dibujar uno de ellos, por ejemplo $\vec{a}$, y luego representar el vector $\vec{b}$ colocando el origen de $\vec{b}$ en el extremo de $\vec{a}$. El vector resultante tiene su origen en el origen de $\vec{a}$ y su extremo, en el extremo de $\vec{b}$.

Otra forma de realizar la suma de $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es dibujar dos representantes de ambos vectores con un mismo origen, O, y completar el paralelogramo. El vector suma $\vec{a} + \vec{b}$ es la diagonal de origen O de dicho paralelogramo. Observa que para realizar la suma de $\vec{b} + \vec{a}$, el paralelogramo correspondiente es el mismo; luego su vector suma también.

Recuerda que...

Una diagonal de un paralelogramo es la recta que pasa por dos vértices opuestos.



La adición de vectores cumple las siguientes propiedades:

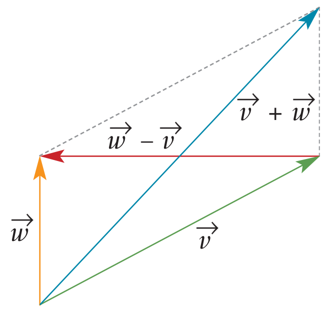
- Conmutativa: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.
- Asociativa: $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$.
- Elemento neutro: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$.
- El módulo del vector resultante es menor o igual que la suma de los módulos de los vectores. Es igual solo cuando los sumandos tienen la misma dirección y el mismo sentido.
- Dado un vector $\vec{a}$, existe un vector opuesto $-\vec{a}$, de igual módulo y dirección, pero sentido contrario, de forma que al sumarlos se obtiene el vector $\vec{0}$ o nulo. Esto es, $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.

Al igual que en el caso de los números, la sustracción de vectores es la operación inversa de la adición de vectores. Restar dos vectores consiste en sumarle al primero el vector opuesto del segundo: $\vec{w} - \vec{v} = \vec{w} + -\vec{v}$.

Gráficamente, si se emplea el método del paralelogramo para la sustracción, la diagonal del paralelogramo obtenido que une los puntos extremos de los vectores representa la resta de los dos vectores.

Pon atención

- El resultado de la adición y la sustracción de vectores es siempre un vector.
- La representación de la diagonal, como $\vec{a} - \vec{b}$ o $\vec{b} - \vec{a}$, dependerá del punto de aplicación del vector y de su extremo.



En resumen

- La suma de dos o más vectores es un vector. La adición de vectores es asociativa, conmutativa, tiene un elemento neutro y elemento inverso para cada vector.
- La resta de vectores, $\vec{a} - \vec{b}$, consiste en sumar a $\vec{a}$ el vector opuesto de $\vec{b}$.
- Para representar la suma o resta de vectores, se pueden utilizar las diagonales de un paralelogramo como representación de ellas.

Actividades

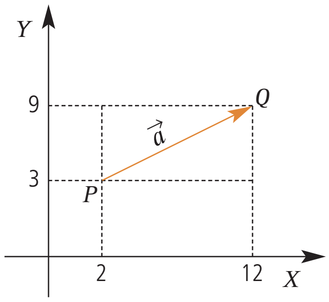
1. Resuelve los siguientes problemas.

a. El minutero de un reloj mide 5 cm. Si el minutero parte desde 0, representa gráficamente el vector desplazamiento de su punta después de quince minutos, media hora, tres cuartos de hora y después de una hora.

b. Dos vectores de desplazamiento centrados en el origen tienen módulos iguales a 6 m y 8 m. ¿Cuál debe ser la dirección y sentido de cada uno de estos vectores para que la resultante tenga un módulo igual a 14 m, 2 m y 6 m? Representa gráficamente cada uno de los casos pedidos.

UNIDAD 3 (98-155)C _Maquetación 1 13-07-11 9:25 Página 106

Vectores en el plano cartesiano



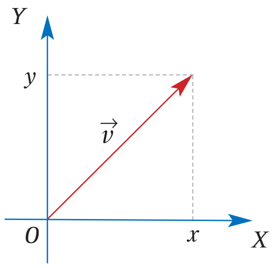
Recuerda que en cursos anteriores conociste el plano cartesiano, que permite representar la ubicación de puntos en el plano mediante sus coordenadas. Observa ahora la siguiente figura, en la que el origen y extremo de un vector $\vec{a}$ en el plano cartesiano corresponden a los puntos $P(2, 3)$ y $Q(12, 9)$, respectivamente.

Analicemos...

- Si $\vec{a}$ se trasladara de modo que su origen se situara en (0, 0), ¿en qué punto se ubicaría su extremo?
- ¿Cómo se representa con números el vector $\vec{a}$?, ¿por qué?
- ¿Cómo se puede calcular el módulo de $\vec{a}$? Explica.
- En general, ¿cómo se representa un vector, si se conocen las coordenadas de su origen y su extremo? Justifica.

Pon atención

- Existen diversas formas de representar analíticamente un vector, en este Texto utilizaremos la notación $\langle x, y\rangle$.
- Se utiliza $\| \vec{v} \|$ para simbolizar el módulo de $\vec{v}$.



Cuando el punto de aplicación de un vector está en el origen de un sistema de coordenadas, su extremo coincidirá con un punto del plano y se representa utilizando este punto, por ejemplo $\vec{v} = \langle x, y\rangle$.

En este caso se puede determinar su módulo utilizando el teorema de Pitágoras. Entonces $\| v \|^2 = x^2 + y^2$, o bien $\| \vec{v} \| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

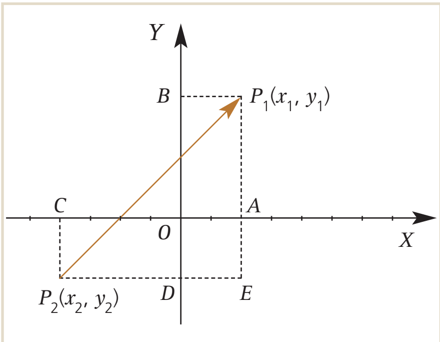
Por otra parte, cuando el origen del vector no coincide con el origen del sistema de coordenadas, se puede calcular la diferencia, componente a componente, entre el extremo y el origen del vector para obtener la representación cartesiana del vector.

Es decir, si $\vec{v}$ tiene su origen en el punto $P_2(x_2, y_2)$ y su extremo en el punto $P_1(x_1, y_1)$, se puede calcular $\vec{v} = \langle x_1 - x_2, y_1 - y_2\rangle$. Por ejemplo, si el origen de $\vec{a}$ corresponde al punto (–5, 2) y su extremo al punto (7, 3), entonces $\vec{a} = \langle 7 - (-5), 3 - 2\rangle = \langle 12, 1\rangle$.

Recuerda que...

Teorema de Pitágoras: la suma de los cuadrados de las medidas de los catetos es igual al cuadrado de la medida de la hipotenusa.

Y para determinar su módulo, se puede calcular la distancia entre el origen y el extremo del vector. Observa. Dado que el punto E tiene coordenadas (x_1, y_2), la medida de los lados estaría dada por: $P_2E = (x_1 - x_2)$ y $EP_1 = (y_1 - y_2)$.



Aplicando el teorema de Pitágoras, se obtiene que $\|P_1P_2\|^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$, de donde

$$\|P_1P_2\| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

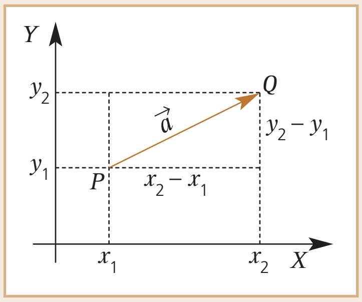
La adición de vectores en **forma analítica** se efectúa a través de sus coordenadas cartesianas, sumando componente a componente. Por ejemplo, al sumar los vectores $\vec{a} = \langle 2, 3\rangle$ y $\vec{b} = \langle -1, 2\rangle$, el vector resultante es: $\langle 2, 3\rangle + \langle -1, 2\rangle = \langle 2 + -1, 3 + 2\rangle = \langle 1, 5\rangle$.

Glosario

forma analítica: se dice de los vectores cuando están representados utilizando sus coordenadas cartesianas, para distinguirlos de su representación geométrica.

En resumen

- Un vector $\overrightarrow{OP}$ que va desde el origen del plano cartesiano al punto P, se denomina **vector posición de P** y se representa por $\vec{p}$. Las componentes de $\vec{p}$ coinciden con las coordenadas del punto $P(p_x, p_y)$, dado que $\vec{p} = \langle p_x - 0, p_y - 0\rangle = \langle p_x, p_y\rangle$.
- Si el origen y extremo de un vector $\vec{a}$ en el plano cartesiano corresponden a los puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$, respectivamente, entonces la forma analítica de ese vector está determinada por: $\vec{a} = \overrightarrow{PQ} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1\rangle$.



- El **módulo** de un vector, que corresponde a su longitud o tamaño, se puede calcular mediante la expresión: $\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$, si $\vec{v} = \langle x, y\rangle$.

Actividades

1. Dibuja y, luego, calcula el módulo de los siguientes vectores centrados en el origen del plano y cuyo extremo es el punto:

a. $A(3, 4)$
b. $B(-7, 12)$
c. $C(-9, -12)$
d. $D(-13, 12)$
e. $E(-1, 0)$
f. $F(0, -4)$

2. Si $\vec{a} = \langle -4, 5\rangle$, $\vec{b} = \langle 6, -3\rangle$ y $\vec{c} = \langle -2, -2\rangle$, grafica y determina $\vec{v}$ de modo que $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$. Luego, calcula su módulo. Explica, paso a paso, cómo lo hiciste.

3. Dados los vectores $\vec{a} = \langle 3, -2\rangle$, $\vec{b} = \langle -1, 5\rangle$ y $\vec{c} = \langle 4, 6\rangle$, determina:

a. $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$
b. $\vec{b} - \vec{c}$
c. $\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$
d. $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$
e. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$
f. $\vec{a} + \vec{c}$

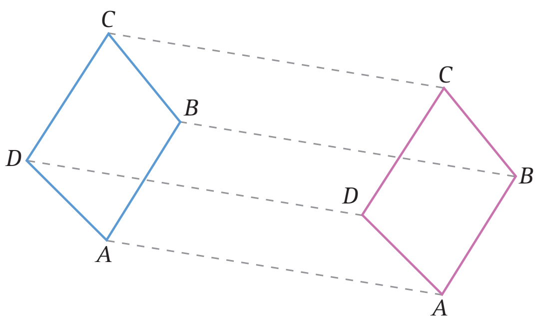
4. Sobre un cuerpo actúan las fuerzas $\vec{f_1} = \langle 6, 8\rangle$, $\vec{f_2} = \langle -15, 20\rangle$, $\vec{f_3} = \langle -4, -16\rangle$. Calcula:

a. la magnitud del vector resultante.
b. la dirección del vector resultante.

UNIDAD 3 (98-155)C _Maquetación 1 13-07-11 9:25 Página 108

Traslación de figuras planas

Observa la siguiente figura:



Analicemos…

- Compara las medidas y la dirección de los trazos AA , BB , CC y DD . ¿Qué puedes concluir?
- ¿Corresponde a una transformación isométrica? Justifica.
- ¿Esta transformación se puede representar utilizando vectores?, ¿por qué?
- Si se conocen las coordenadas de la figura $ABCD$, ¿cómo se pueden obtener las coordenadas de $A\ B\ C\ D$? Explica.

Recuerda que…

Una **traslación** es una transformación isométrica que desplaza todos los puntos del plano en igual magnitud, dirección y sentido.

A una figura dada se le puede aplicar una traslación, que desplaza todos los puntos de una figura en igual magnitud, dirección y sentido. Luego, tal como las fuerzas y los desplazamientos, se puede utilizar un vector para representarla, el que se suma a los vectores posición de cada punto.

Glosario

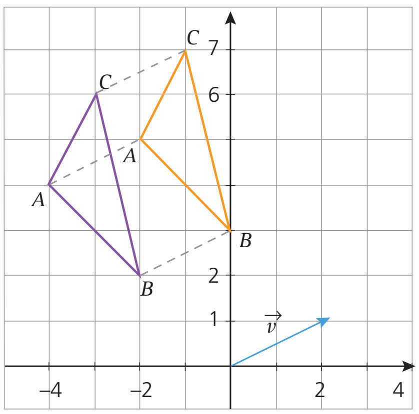
imagen bajo una transformación: elemento (punto, segmento o figura) obtenido, a partir de otro similar, mediante una transformación del plano.

Para obtener la **imagen bajo una transformación** de una figura (la imagen de una figura bajo la traslación), basta con sumar el vector de traslación, en este caso, a cada uno de los vértices de la figura, coordenada a coordenada. Por ejemplo, la traslación del triángulo cuyos vértices son $A(-4, 4)$, $B(-2, 2)$ y $C(-3, 6)$, dada por el vector $\vec{v} = \langle 2, 1\rangle$, es:

A': (–4, 4) + (2, 1) = (–2, 5)

B': (–2, 2) + (2, 1) = (0, 3)

C': (–3, 6) + (2, 1) = (–1, 7)

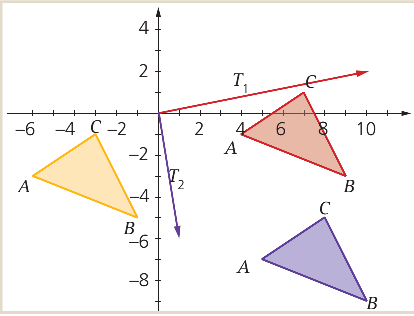


La traslación anterior se denota como $\vec{T}\langle 2, 1\rangle$ de los puntos del ΔABC. En la imagen se muestra la traslación del triángulo ABC.

Composición de traslaciones

Si al resultado de una traslación se le aplica otra traslación, se habla de **composición** de traslaciones.

Observa la figura:



Como se puede observar, $\Delta A'B'C'$ se obtiene aplicando $\vec{T}_1\ \langle 10,\ 2\rangle$ a los vértices del ΔABC. En cambio, $\Delta A''B''C''$ se obtiene aplicando $\vec{T}_2\ \langle 1, -6\rangle$ a los vértices del $\Delta A'B'C'$.

Entonces, para representar la traslación del ΔABC al $\Delta A''B''C''$, se calcula la composición de las traslaciones; esto es, si $\vec{T}_1\ \langle x_1, y_1\rangle$ y $\vec{T}_2\ \langle x_2, y_2\rangle$, entonces $\vec{T}_2 \circ \vec{T}_1 = \langle x_1 + x_2, y_1 + y_2\rangle$.

En este caso, $\vec{T}_2 \circ \vec{T}_1 = \langle 10 + 1,\ 2 + -6\rangle = \langle 11, -4\rangle$ representa la traslación del ΔABC al $\Delta A''B''C''$.

Glosario

composición: de transformaciones, dadas dos transformaciones $\vec{S}$, $\vec{T}$, es otra transformación, $\vec{T} \circ \vec{S}$, que resulta de aplicar sucesivamente las anteriores. Esto es: $(\vec{T} \circ \vec{S})\ \langle x, y\rangle = \vec{T}\,(\vec{S}\,\langle x, y\rangle)$. Observa que primero se aplica $\vec{S}$ y a su imagen se aplica $\vec{T}$.

Pon atención

Al igual que en el caso de las funciones, la inversa de una traslación $\vec{T}$ es aquella traslación que deshace las transformaciones que realiza $\vec{T}$.

En resumen

- La **traslación** de una figura en el plano cartesiano da origen a una nueva figura, que es congruente con la anterior; es decir, mantiene la misma forma y medidas.
- Una **composición de traslaciones** resulta de aplicar una traslación a otra traslación ya realizada.
- Si $\vec{T}\langle x, y\rangle$ es una traslación en el plano cartesiano, entonces $\vec{T}^{-1}\langle x, y\rangle$ es su **traslación inversa**, y corresponde a la trasformación que tiene la misma magnitud y dirección, pero sentido contrario. O sea, $\vec{T}^{-1}\langle x, y\rangle = \vec{T}\langle -x, -y\rangle$.

Actividades

1. **Los vértices de un cuadrilátero son (1, 0), (0, 2), (–3, 0), (0, –1). ¿Cuáles serán los vértices del cuadrilátero si se aplica una traslación de vector $\langle 3, -2\rangle$?**
2. **Considera dos circunferencias de igual radio, una con centro O (–2, 3) y la otra con centro A (–1, 1). Determina el vector que permite trasladar la circunferencia de centro O a la posición con centro en A. Luego, determina el vector de la traslación opuesta a la realizada. ¿Qué puedes concluir?**
3. **Determina las traslaciones inversas de cada una de las siguientes traslaciones:**

   a. $\vec{T}_1\ \langle 2, 3\rangle$ b. $\vec{T}_2\ \langle -3, 4\rangle$ c. $\vec{T}_3\ \langle -6, -7\rangle$ d. $\vec{T}_4\ \langle 0, -4\rangle$

UNIDAD 3 (98-155)C _Maquetación 1 13-07-11 9:25 Página 110

Producto por un escalar

Sobre un cuerpo se aplican dos fuerzas, una se representa mediante el vector $\vec{f} = \langle 2, -3 \rangle$, y la otra por el vector $\vec{g} = \langle -6, 9 \rangle$.

Analicemos...

- Dibuja un plano cartesiano y traza los vectores $\vec{f}$ y $\vec{g}$, partiendo del origen. ¿Qué tienen en común? Explica.
- Representa en el mismo plano una fuerza que sea el triple de la fuerza $\vec{f}$. ¿Cuál es su representación algebraica?, ¿por qué?
- ¿Cuál es el valor de λ tal que se cumpla $\vec{g} = \lambda \cdot \vec{f}$? Justifica.

Al dibujar en un plano cartesiano los vectores $\vec{f}$ y $\vec{g}$ seguramente pudiste observar que tienen la misma dirección, aunque no tienen el mismo sentido ni la misma magnitud.

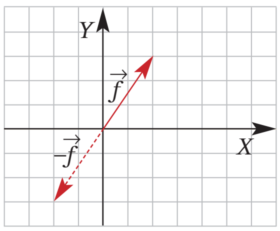
Además, para calcular el triple de la fuerza $\vec{f}$, se calcula el triple de cada una de las coordenadas.
Esto es: $3 \cdot \vec{f} = 3 \cdot \langle 2, -3 \rangle = \langle 3 \cdot 2, 3 \cdot -3 \rangle = \langle 6, -9 \rangle$

Es decir, tanto gráfica como algebraicamente, el vector resultante aumenta al triple su módulo, manteniendo su dirección y sentido.

En general, cuando se calcula el **producto por un escalar** de un vector, se obtiene un nuevo vector, que conserva la dirección del vector original, pero cuya magnitud y sentido cambian según el valor por el cual fue multiplicado. Observa.

Para graficar el mismo vector, pero multiplicado por –1, se puede calcular $-1\vec{f} = -1 \cdot \langle 2, -3 \rangle = \langle -1 \cdot 2, -1 \cdot -3 \rangle = \langle -2, 3 \rangle$

Observa la imagen donde se representaron $\vec{f}$ y $-\vec{f}$



Propiedades del producto por un escalar

Dados los escalares λ y μ, y los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, se cumplen las siguientes propiedades:

1. $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$
2. $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$ .... distributividad
3. $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$ .... asociatividad
4. $1\vec{a} = \vec{a}$ .... elemento neutro
5. $0\vec{a} = \vec{0}$ .... propiedad absorbente del cero

Glosario

producto por un escalar: aplicado a un vector $\vec{a}$, es otro vector cuya magnitud es el producto del escalar por la magnitud de $\vec{a}$, cuya dirección es la de $\vec{a}$ y cuyo sentido es el mismo u opuesto, según el escalar sea positivo o negativo.
escalar: elemento de un conjunto numérico; se usa, en particular, cuando se le quiere distinguir claramente de los vectores.

UNIDAD 3 (98-155)C _Maquetación 1 13-07-11 9:25 Página 111

Ejemplo

Dados los vectores $\vec{a} = \langle -6, 2\rangle$ y $\vec{b} = \langle 3, -4\rangle$, ¿cuánto resulta $5(\vec{a} + \vec{b})$?

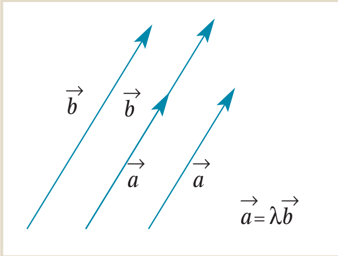
$5(\vec{a} + \vec{b}) = 5\vec{a} + 5\vec{b} = 5\langle -6, 2\rangle + 5\langle 3, -4\rangle$

Recuerda que...

$|\lambda|$ se refiere al valor absoluto de un número real.
$\|\vec{a}\|$ se refiere al módulo de un vector.

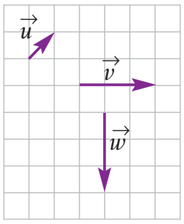
En resumen

- El **producto de un escalar** λ por un vector $\vec{a}$, de coordenadas $\langle x, y\rangle$, es otro vector dado por $\lambda\vec{a}$, y se define como: $\lambda\vec{a} = \lambda\langle x, y\rangle = \langle \lambda x, \lambda y\rangle$. Se dice que $\lambda\vec{a}$ es un **vector ponderado** de $\vec{a}$.
- Observa que dos vectores paralelos se pueden expresar uno como ponderado del otro: $\vec{a} = \lambda\vec{b}$ o bien $\vec{b} = \mu\vec{a}$.
- El vector ponderado $\lambda\vec{a}$ tiene las siguientes características:
  - Mantiene la dirección de $\vec{a}$.
  - $\|\lambda \cdot \vec{a}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{a}\|$.
  - Si $\lambda > 0$, el vector mantiene el sentido de $\vec{a}$. Si $\lambda < 0$, el vector cambia de sentido.
  - Si $\lambda = 0$, entonces $\lambda\vec{a} = \vec{0}$ (vector nulo).



Actividades

1. Copia en tu cuaderno los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$. Luego, representa:



a. $\vec{u} + \vec{v}$
b. $3\vec{u}$
c. $2\vec{u} - \vec{v}$
d. $\vec{v} + 2\vec{w}$
e. $2\vec{u} - \vec{v} - \vec{w}$

2. Calcula el resultado de las siguientes operaciones:

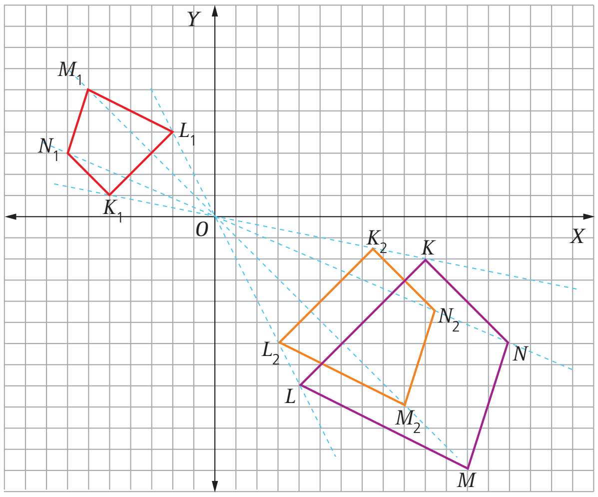
a. $3\langle 2, -1\rangle - 3\langle 2, 3\rangle$
b. $-2\langle 7, -3\rangle + 5\langle 0, 5\rangle$
c. $\langle 5, -2\rangle - \langle 3, 1\rangle + 2\langle 6, 0\rangle$
d. $5\langle 3, -2\rangle - 4\langle -1, 0\rangle + 2\langle -1, -3\rangle$

3. Dado el producto de $\mu\vec{a}$, con $\vec{a} \neq 0$, ¿qué características cumple el producto, en cada caso? Justifica tu respuesta con la representación gráfica correspondiente.

a. ¿si $\mu > 1$?
b. ¿si $\mu = 1$?
d. ¿si $\mu = 0$?
e. ¿si $\mu = -1$?

Homotecia

En cursos anteriores aprendiste que las transformaciones isométricas son transformaciones geométricas que preservan la forma y el tamaño de las figuras; sin embargo, no todas las transformaciones geométricas son así. Por ejemplo, en la siguiente figura se puede observar el cuadrilátero $KLMN$, de vértices $K(10, -2)$, $L(4, -8)$, $M(12, -12)$ y $N(14, -6)$, y sus respectivas imágenes: el cuadrilátero $K_1L_1M_1N_1$ y el cuadrilátero $K_2L_2M_2N_2$.



Analicemos...

- ¿Cómo describirías los cuadriláteros obtenidos, respecto del original? Explica.
- ¿Corresponde, en cada caso, a la imagen bajo una transformación isométrica?, ¿por qué?
- Determina los pares ordenados correspondientes a los vértices de cada cuadrilátero. ¿Qué puedes concluir?
- Calcula la medida de los lados de cada cuadrilátero. ¿Existe una proporción entre ellos? Explica.

Recuerda que...

La imagen bajo una transformación es un elemento (punto, segmento o figura) obtenido, a partir de otro similar, mediante una transformación del plano.

En la figura anterior puedes observar que las imágenes bajo la transformación tienen la misma forma original, las medidas de sus ángulos se mantienen, pero no así las medidas de sus lados; es decir, son semejantes, ya sean de menor o mayor tamaño.

En cada caso, la imagen resultante se puede construir con ayuda de rectas que pasan por el mismo punto O. Observa que al comparar los vectores correspondientes (por ejemplo, $\overrightarrow{OM}$ con $\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{OL}$ con $\overrightarrow{OL_1}$, etc.) se obtiene que la razón de sus módulos es una constante.

Cuando esto ocurre, se dice que una de las figuras es la imagen de la otra bajo una **homotecia**. La homotecia está definida por el punto O, que es el **centro** de la homotecia, y un número k, que es la **razón** entre el módulo de los vectores correspondientes en esa transformación. Se representa como $H(O,\ k)$. El número k es distinto de cero, ya sea positivo o negativo.

Si la homotecia tiene una razón k, se puede concluir que la magnitud del vector $\overrightarrow{OA}$ es $|\,k\,|$ veces igual a la magnitud del correspondiente vector $\overrightarrow{OA}$.

En caso que la homotecia tenga razón negativa, ($k < 0$), el vector $\overrightarrow{OA}$ está en la misma dirección, pero en sentido contrario al vector $\overrightarrow{OA}$.

Ejemplo

Considera el ΔABC, de coordenadas $A(2, –4)$, $B(0, –2)$ y $C(6, 3)$, y el origen $O(0, 0)$. Encuentra su imagen bajo la homotecia $H(O, –2)$.

Para aplicar una homotecia es necesario determinar primero los vectores desde el centro de homotecia O a cada uno de los puntos.

En este caso, ya que el centro de la homotecia está en el origen $O(0, 0)$, los vectores son $\overrightarrow{OA} = \langle 2, –4\rangle$, $\overrightarrow{OB} = \langle 0, –2\rangle$, $\overrightarrow{OC} = \langle 6, 3\rangle$. A estos vectores se les aplica la homotecia; luego, $\overrightarrow{OA} = \langle –4, 8\rangle$, $\overrightarrow{OB} = \langle 0, 4\rangle$, $\overrightarrow{OC} = \langle –12, –6\rangle$.

Entonces, su imagen es el $\Delta A'B'C'$ de coordenadas $A'(–4, 8)$, $B'(0, 4)$, $C'(–12, –6)$. Observa que la proporción que existe entre los triángulos corresponde a la razón de homotecia.

Se puede verificar que dos figuras son **homotéticas** si, al unir mediante rectas los puntos o vértices correspondientes de ellas, estas rectas concurren en un único punto que es el centro de homotecia O.

Composición de homotecias

Al igual que con las traslaciones, se puede realizar una composición de homotecias; es decir, se puede aplicar una homotecia a la imagen de la homotecia de una figura.

La composición de homotecias, cuando su centro de homotecia es el mismo, es una homotecia con igual centro, y cuya razón corresponde al producto de las razones de las homotecias originales.

Glosario

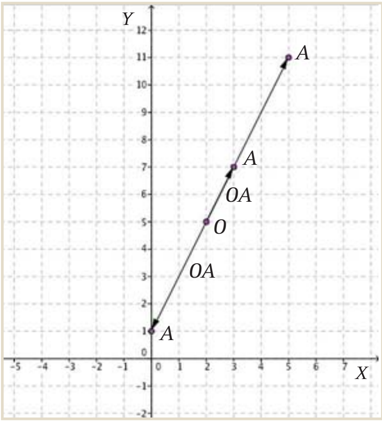
homotecia: transformación en el plano con respecto a un centro O, que permite obtener una figura semejante a otra figura dada.

homotético(a): elemento (punto, segmento o figura) que es imagen de otro similar bajo una homotecia.

Pon atención

Cuando la homotecia tiene centro en el origen de coordenadas, dado un punto $A(x, y)$ y su homotético $A'(x', y')$, se cumple que la relación que hay entre ellos es la siguiente: $x' = kx$ e $y' = ky$, donde k es la razón de la homotecia.

UNIDAD 3 (98-155)C _Maquetación 1 13-07-11 9:25 Página 114



Ejemplo

Dado los puntos $A(3, 7)$ y $O(2, 5)$ y las homotecias $H_1(O, -2)$ y $H_2(O, -1{,}5)$, determina el homotético de A respecto de la composición de homotecias $H_2 \circ H_1$.

- Se obtiene el vector $\overrightarrow{OA}$: $\overrightarrow{OA} = \langle 3 - 2, 7 - 5 \rangle = \langle 1, 2 \rangle$.
- Se aplica primero la homotecia H_1; luego, $\overrightarrow{OA'} = -2 \cdot \langle 1, 2 \rangle = \langle -2, -4 \rangle$.
- Se aplica la homotecia H_2 al vector $\overrightarrow{OA'}$; luego, $\overrightarrow{OA''} = -1{,}5 \cdot \langle -2, -4 \rangle = \langle 3, 6 \rangle$.

Luego, A'' se obtiene de $\overrightarrow{O} + \overrightarrow{OA''} = \langle 2, 5 \rangle + \langle 3, 6 \rangle = \langle 5, 11 \rangle$. Es decir, el homotético de A es el punto (5, 11).

En resumen

- Una **homotecia** es una transformación geométrica que no afecta la forma de la figura, pero sí puede cambiar su tamaño y orientación.
- Una **homotecia** de centro O y razón k, con $k \neq 0$ transforma un vector $\overrightarrow{OP}$ en un vector $\overrightarrow{OP'}$, tal que $\overrightarrow{OP'} = k \cdot \overrightarrow{OP}$. Se escribe $H(O, k)$. Algunas de sus características son:
  - las figuras generadas mediante homotecia son semejantes a las figuras originales.
  - los lados correspondientes entre dos figuras homotéticas son paralelos.
  - si la razón es positiva, la homotecia preserva el sentido de las figuras. Si la razón es negativa, la homotecia invierte las figuras.
- La composición de dos homotecias de centro C es otra homotecia de centro C, y su razón corresponde al producto de las razones; esto es, si $H'(C, k')$ y $H(C, k)$, $H \circ H = H_1$, donde $H_1(C, k \cdot k')$.

Actividades

1. **Considera un cuadrilátero $ABCD$ de coordenadas $A(3, -3)$, $B(6, -6)$, $C(10, 1)$ y $D(4, 3)$ y el origen $O(0, 0)$. Encuentra su figura homotética, respecto de:**
   a. $H(O, -1)$
   b. $H\left(O, \frac{3}{2}\right)$
2. **Considera un cuadrado $ABCD$, tal que el punto de intersección de sus diagonales es E. Haz el dibujo en tu cuaderno de las siguientes transformaciones homotéticas:**
   a. $H_1 \circ H_2$, con $H_1(E, 3)$ y $H_2\left(E, \frac{1}{2}\right)$
   b. $H_3 \circ H_4$, con $H_3(A, 2)$ y $H_4\left(A, -\frac{3}{2}\right)$
3. **Verifica si el área de una figura homotética es igual al producto del área de la figura original por el cuadrado de la razón de homotecia.**

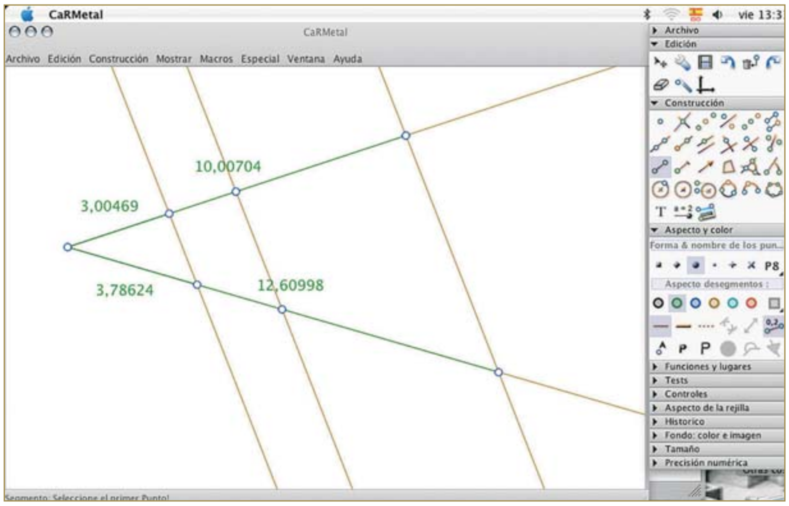
Herramientas tecnológicas

Usando el programa Regla y Compás, aprenderás a analizar gráficamente el concepto de homotecia.

Ingresa al sitio web: www.educacionmedia.cl/web, escribe el código **11m4115** y pulsa la flecha verde. Al hacerlo, se abrirá una nueva página. Haz clic en el botón **Descarga y Webstart** que está ubicado en el costado izquierdo de la pantalla. Luego selecciona el sistema operativo que tiene tu computador y presiona **Download**. De este modo habrás descargado el software. Instálalo y luego realiza las siguientes actividades:

- Con el comando **vector** construye tres o cuatro vectores cuyo punto de origen sea el mismo para todos ellos.
- A continuación, selecciona del menú **Macros**, la opción **Vectores** y luego **Vect. mult. por un real (dlog)**.
- Selecciona uno de los vectores, y después marca el punto de origen del vector.
- Escribe la razón de homotecia en un cuadro que aparecerá más abajo (no muy grande, por ejemplo 2,0 o 2,5), y presiona **enter**. Aparecerá en pantalla un segundo vector con el mismo origen y dirección que el primero.
- Repite el paso anterior para cada uno de los demás vectores, cuidando de multiplicar todos los vectores por el mismo factor. La razón de homotecia será el factor de multiplicación, ya que al indicar el origen del vector, el segundo vector toma como origen este mismo punto.
- Finalmente, presiona el botón mover, o selecciona esta opción del menú **Edición**. Puedes mover tanto el centro de homotecia (el origen de los vectores que construiste) como los puntos finales de los vectores.

  Obtendrás algo como lo que se muestra en la siguiente imagen:



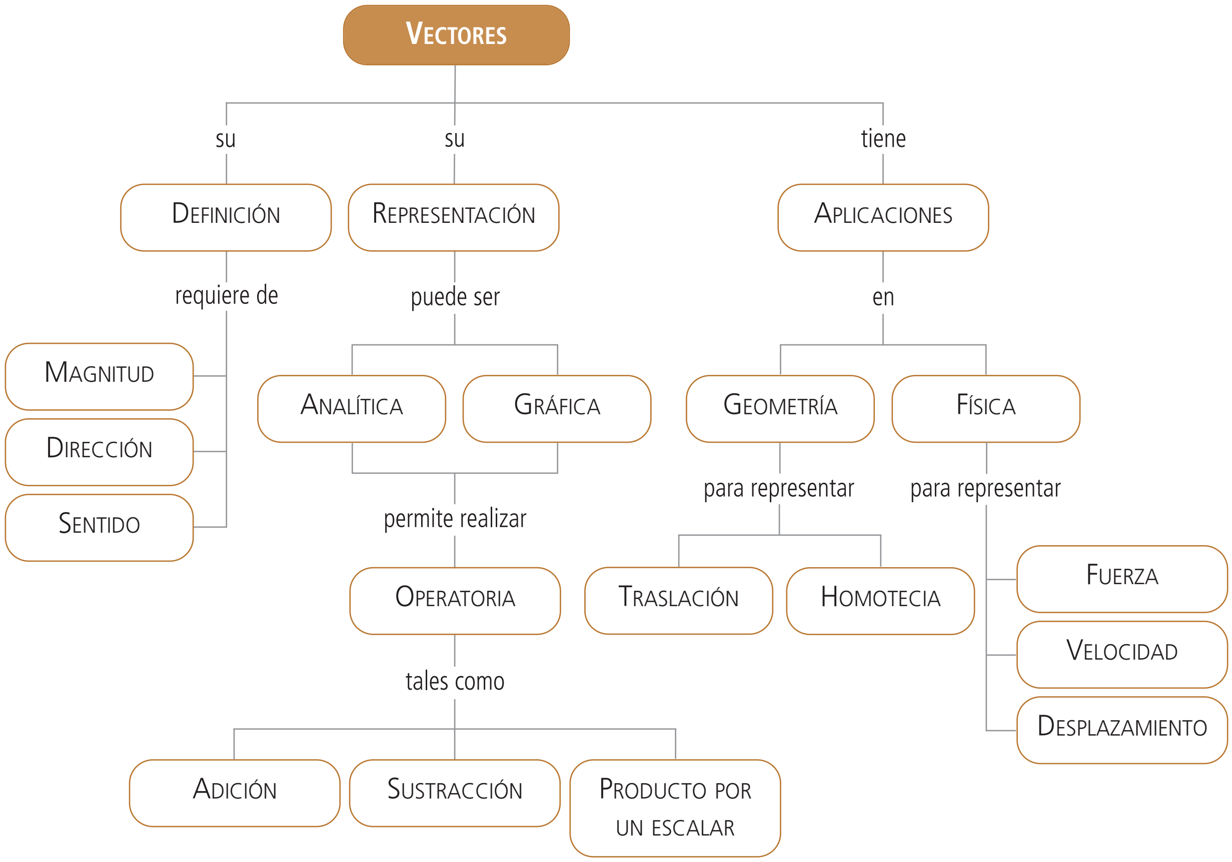
Utilizando Regla y Compás, desarrolla las siguientes actividades:

1. Comprueba que la razón de homotecia se mantiene, independientemente de mover el origen o cualquiera de los puntos de la figura original.
2. Considera ahora una homotecia con un factor k negativo, ¿qué características tiene la imagen resultante respecto de la original? Explica.

UNIDAD 3 (98-155)C _Maquetación 1 13-07-11 9:25 Página 116

Organizando lo aprendido

- **En el siguiente mapa conceptual se muestran los conceptos tratados en las páginas anteriores.**



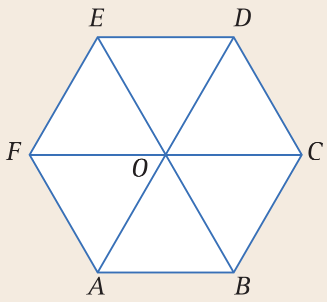
- **Utilizando los contenidos aprendidos hasta aquí y, apoyándote en el esquema anterior, responde en tu cuaderno.**

1. ¿Crees que faltó un concepto importante en el mapa conceptual?, ¿cuál? Agrégalo.
2. ¿Qué es la magnitud de un vector?, ¿y el sentido?
3. ¿Cuál es la diferencia entre una traslación y una homotecia?
4. ¿Cómo se suman dos vectores cuando están representados gráficamente? Explica.
5. ¿Qué características tiene una homotecia si $k > 1$?
6. El producto por un escalar, ¿mantiene el sentido del vector?, ¿por qué?
7. ¿Tienes alguna duda sobre los conceptos tratados en las páginas anteriores?, ¿cuál? Compártela con tu curso e intenten aclararla en conjunto.

Mi progreso

1. Utilizando los vectores que determinan los vértices y el centro del hexágono regular de la figura, halla los vectores solución de las siguientes operaciones:

a. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OC}$
b. $\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{ED}$
c. $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{AB}$
d. $\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{OC}$



2. Dados los vectores $\vec{a} = \langle 3, -2\rangle$ y $\vec{b} = \langle -1, 5\rangle$, determina:

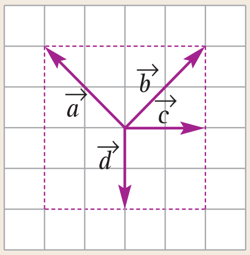
a. $3\vec{a} - 2\vec{b}$ b. $-\vec{a} - \vec{b}$ c. $5\vec{a} + 2\vec{b}$ d. $\|\vec{a} + 3\vec{b}\|$

3. Dado el triángulo ABC de vértices $A(4, 2)$, $B(7, 2)$ y $C(7, 5)$, determina su imagen si se aplica:

a. una traslación $\vec{T}\langle -3, 1\rangle$. b. una homotecia $H(O, -2)$.

4. Los vectores de la figura tienen su origen en el centro de un cuadrado y el extremo en un vértice o en el punto medio de uno de los lados del cuadrado. ¿Cuál de las siguientes igualdades es incorrecta? Explica tu decisión en cada caso.

A. $\vec{a} - \vec{b} = -2\vec{c}$
B. $\vec{a} + \vec{b} = 2\,\vec{d}$
C. $\|\vec{a} - \vec{d}\| = \|\vec{b} + \vec{c}\|$
D. $\vec{c} - \vec{d} = \vec{b}$
E. $\|\vec{c} + \vec{a}\| = \|\vec{b} + \vec{d}\|$



¿Cómo voy?

- Verifica en el solucionario del Texto si tus respuestas son correctas. Si tuviste respuestas incorrectas, marca en la tabla el criterio correspondiente y revisa las páginas indicadas. Luego, identifica el error y corrígelas.

Criterio	Ítems	Páginas donde se trabaja
Operar con vectores representados gráficamente.	1 y 4	102 a 105
Operar con vectores representados analíticamente.	2	106, 107, 110 y 111
Aplicar traslaciones y homotecias a una figura.	3	108, 109, 112 a 114

Producto punto

En Física, se define el **trabajo mecánico** como el producto entre la fuerza aplicada a un cuerpo y su desplazamiento. Mientras mayor sea la fuerza aplicada y/o el desplazamiento logrado, mayor será también el trabajo realizado.

Ya que tanto la fuerza como el desplazamiento son vectores, el trabajo depende de las direcciones en que se aplica la fuerza y en que se produce el desplazamiento; en particular, depende del ángulo que se forma entre estos vectores, y se calcula mediante la expresión:

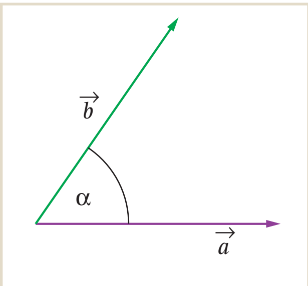
$$W = \|\vec{F}\| \cdot \|\vec{d}\| \cdot \cos(\alpha)$$

Analicemos...

- Considerando la expresión que define el trabajo mecánico, ¿W corresponde a un valor numérico o a un vector?, ¿por qué?
- Dada una fuerza aplicada a un cuerpo y su correspondiente desplazamiento, ¿qué condiciones deben cumplirse para que el trabajo realizado sea máximo? Explica.
- ¿Es posible que se aplique fuerza a un cuerpo y este cuerpo se desplace, pero que el trabajo sea nulo? Justifica.

Glosario

producto punto: se dice de dos vectores, $\vec{a}$ y $\vec{b}$, al número real igual a $\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos(\alpha)$, donde α es el ángulo (entre 0 y 180°) que forman.



La operación que permite obtener el trabajo mecánico W a partir de la fuerza $\vec{F}$ y el desplazamiento $\vec{d}$, se conoce como **producto punto** o producto escalar.

El producto punto de dos vectores es un número y dicho producto será un número positivo, nulo o negativo, según si el ángulo formado por los dos vectores es agudo, recto u obtuso ($0 \leq \alpha \leq 180°$). También el producto punto es nulo si alguno de los factores es nulo.

Si aplicamos esto a la definición de trabajo mecánico, el trabajo obtenido es: máximo cuando la fuerza aplicada y el desplazamiento tienen la misma dirección y sentido, positivo si el ángulo α (que forman sus vectores) cumple que $0 < \alpha < 90°$, nulo cuando sus vectores son perpendiculares, y negativo si el ángulo α cumple que $90° < \alpha \leq 180°$.

Ejemplo

Calcula el producto punto de los vectores si $\|\vec{a}\| = 3$, $\|\vec{b}\| = 8$ y $\alpha = 60°$.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos(\alpha) = 3 \cdot 8 \cdot \cos(60°) = 12.$$

En cambio, si dos vectores en el plano están representados en forma analítica, digamos $\vec{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ y $\vec{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$, el producto punto se calcula multiplicando las coordenadas de ambos vectores, componente a componente, y sumando sus resultados, es decir: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \langle a_1, a_2 \rangle \cdot \langle b_1, b_2 \rangle = a_1\, b_1 + a_2\, b_2$.

Ejemplo

Dados $\vec{a} = \langle 2, -1 \rangle$ y $\vec{b} = \langle 3, 4 \rangle$, calcula $\vec{a} \cdot \vec{b}$ y $\vec{b} \cdot \vec{a}$.
¿Qué puedes concluir?

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \langle 2, -1 \rangle \cdot \langle 3, 4 \rangle = 2 \cdot 3 + (-1) \cdot 4 = 6 - 4 = 2$.
- $\vec{b} \cdot \vec{a} = \langle 3, 4 \rangle \cdot \langle 2, -1 \rangle = 3 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) = 6 - 4 = 2$.

En general, el producto punto es conmutativo, es decir: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.

En resumen

- El **producto punto** de dos vectores está dado por la expresión $\vec{a} \cdot \vec{b} = \| a \| \cdot \| b \| \cdot \cos(\alpha)$, con α: ángulo comprendido entre ambos vectores.
- O bien, si $\vec{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ y $\vec{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$, el **producto punto** se calcula: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \langle a_1, a_2 \rangle \cdot \langle b_1, b_2 \rangle = a_1\, b_1 + a_2\, b_2$.
- Para todos los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$, se cumple que: $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq \|\vec{b}\| \cdot \|\vec{a}\|$.
- Si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son perpendiculares, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Actividades

1. Calcula el producto punto de los vectores, considerando los datos dados.

a. $\|\vec{u}\| = 5$; $\|\vec{v}\| = 7$; $\alpha = 30°$

b. $\|\vec{u}\| = 7$; $\|\vec{v}\| = 7$; $\alpha = 90°$

c. $\|\vec{u}\| = \frac{3}{5}$; $\|\vec{v}\| = 1$; $\alpha = 45°$

d. $\|\vec{u}\| = 10$; $\|\vec{v}\| = 3$; $\alpha = 180°$

2. Para cada par de vectores siguientes, calcula $\|\vec{a}\|$, $\|\vec{b}\|$ y $|\vec{a} \cdot \vec{b}|$. Luego, verifica que se cumple que $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq \|\vec{b}\| \cdot \|\vec{a}\|$, en cada caso. ¿Qué debe ocurrir para que se cumpla $|\vec{a} \cdot \vec{b}| = \|\vec{b}\| \cdot \|\vec{a}\|$?

a. $\vec{a} = \langle 3, 2 \rangle$ y $\vec{b} = \langle 5, 1 \rangle$

b. $\vec{a} = \langle 4, 7 \rangle$ y $\vec{b} = \langle 3, -1 \rangle$

c. $\vec{a} = \langle -2, 0 \rangle$ y $\vec{b} = \langle 8, 2 \rangle$

d. $\vec{a} = \left\langle \frac{1}{2}, \frac{2}{3} \right\rangle$ y $\vec{b} = \langle -2, 3 \rangle$

3. Analiza qué ocurre con el producto punto de $\vec{a}$ y $\vec{b}$ si:

a. $\vec{a}$ aumenta y $\vec{b}$ se mantiene constante.

b. $\vec{a}$ y $\vec{b}$ aumentan.

c. $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son perpendiculares.

d. $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son paralelos.

UNIDAD 3 (98-155)C _Maquetación 1 13-07-11 9:25 Página 120

Ecuación vectorial de la recta en el plano

Viviana representó en su cuaderno los siguientes vectores en un sistema de coordenadas:

$$\langle -2, 1\rangle; \langle 2, -1\rangle; \langle 0, 1\rangle; \langle 4, -2\rangle; \langle 1, -0{,}5\rangle; \langle 3, 1{,}5\rangle$$

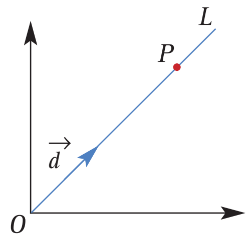
Sebastián observó que, en algunos casos, parecía que los vectores estuvieran sobre una misma recta.

Analicemos...

- Dibuja los vectores anteriores en tu cuaderno. ¿Se cumple lo que dice Sebastián?, ¿por qué?
- Determina cuáles de ellos pueden representarse uno como vector ponderado del otro. Luego, decide si se cumple la frase: "Si uno o más vectores pueden escribirse uno como vector ponderado de otro, entonces pertenecen a la misma recta". Justifica tu respuesta.
- ¿Se pueden representar rectas en el plano, utilizando vectores en su forma analítica?, ¿por qué?
- ¿Cómo es la ecuación vectorial de la recta que contiene a un vector dado? Explica.

Para analizar si lo que observó Sebastián es correcto, podemos utilizar nuestros conocimientos. Sabemos que dos puntos determinan una recta en el plano. Si se considera que uno de estos puntos es el origen, y el otro es el correspondiente al extremo del vector, entonces basta un vector para determinar una recta, que tiene la misma dirección del vector y pasa por el origen.

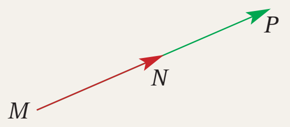
En un plano cartesiano se puede representar una recta L, que pasa por el origen $O(0, 0)$ y con **vector director** $\vec{d} = \langle d_1, d_2\rangle$ paralelo a la recta L. Si P es un punto que pertenece a la recta L, por ejemplo $P(x, y)$, entonces siempre existe un número real λ, tal que $\overrightarrow{OP} = \lambda \cdot \vec{d}$. Observa:



Luego la ecuación vectorial de la recta L, expresada en coordenadas, es $\langle x, y\rangle = \lambda\langle d_1, d_2\rangle$.

Recuerda que...

La colinealidad de puntos se puede expresar y verificar vectorialmente por medio de la ponderación. Si M, N y P son tres puntos colineales, entonces existe algún número real λ, tal que $\overrightarrow{MP} = \lambda \cdot \overrightarrow{MN}$.



Glosario

vector director: se dice de un vector que es paralelo a otro elemento, como una recta o un plano, de modo que indica su dirección.

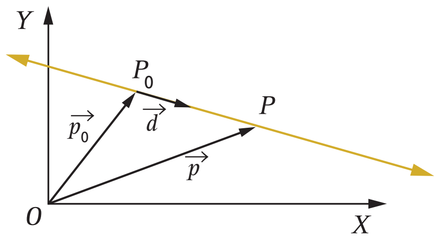
Pon atención

- Dados dos puntos distintos, se puede obtener una única recta que pase por los dos puntos.
- Todo punto en el plano cartesiano tiene coordenadas (x, y).

Ahora, cuando la recta no pasa por el origen, además del vector director es necesario determinar un vector que indique la ubicación de la recta en el plano.

En este caso, para representar la recta L con vector director $\vec{d}$, pero que pasa por el punto $P_0(x_0, y_0)$, se considera que si P es un punto cualquiera de la recta, de coordenadas $P(x, y)$, existe un número real λ, tal que $\overrightarrow{P_0P} = \lambda \cdot \vec{d}$, y por lo tanto: $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \lambda \cdot \vec{d}$.

Utilizando el **vector posición** $\vec{p_0}$ de P_0 y considerando el vector $\vec{p}$ de P, resulta: $\vec{p} = \vec{p_0} + \lambda \cdot \vec{d}$.



Además, si d_1 y d_2 son las componentes del vector $\vec{d}$, la ecuación vectorial de la recta, expresada en coordenadas es:
$\langle x, y\rangle = \langle x_0, y_0\rangle + \lambda \langle d_1, d_2\rangle$.

Ejemplo

Dados los puntos A (2, 3) y B (5, 2), determina la ecuación vectorial de la recta que pasa por ellos.

Se utiliza el vector $\vec{b}$ como vector posición de la recta. Luego, se calcula su vector director $\vec{d}$, que corresponde al vector $\overrightarrow{AB}$, $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = \langle 2, 3\rangle - \langle 5, 2\rangle = \langle -3, 1\rangle$.

De esa manera, se puede escribir la ecuación vectorial de la recta como: $\langle x, y\rangle = \langle 5, 2\rangle + \lambda\langle -3, 1\rangle$. O bien, como: $\langle x, y\rangle = \langle 5 - 3\lambda, 2 + \lambda\rangle$ con $\lambda \in$ IR. También se puede usar $\vec{a}$ como vector posición.

Veamos ahora qué sucede si $\lambda = \frac{1}{2}$. Al remplazar en la ecuación:

$$\left\langle x, y\right\rangle = \left\langle 5 - 3\lambda, 2 + \lambda\right\rangle = \left\langle 5 - \frac{3}{2}, 2 + \frac{1}{2}\right\rangle = \left\langle \frac{10-3}{2}, \frac{4+1}{2}\right\rangle = \left\langle \frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right\rangle$$

Observa que, por otra parte, el punto medio del segmento AB está dado por: $\left(\frac{2+5}{2}, \frac{3+2}{2}\right) = \left(\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right)$, lo que coincide con el punto correspondiente a $\lambda = \frac{1}{2}$.

Glosario

vector posición: se dice del vector que indica la posición de otro elemento, como una recta o un plano.

Pon atención

Una recta que no pasa por el origen, L: $\vec{p} = \vec{p_0} + \lambda\, \vec{d}$, es una traslación en el vector $\vec{p_0}$ de la recta $\vec{p} = \lambda\, \vec{d}$.

Recuerda que...

El punto medio de un segmento, cuyos extremos son (a, b) y (c, d) está dado por:

$$\left(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2}\right)$$

Glosario

parámetro: variable que puede tomar diferentes valores, condicionando así los del resto de las variables.

Una ventaja importante de una ecuación vectorial de una recta es poder obtener ecuaciones para un segmento específico de la recta por medio de una restricción del **parámetro** λ.

Por ejemplo, la ecuación $\langle x, y\rangle = \langle 2, -1\rangle + \lambda\langle 1, 2\rangle$, con $1 \leq \lambda \leq 3$ describe el segmento de recta que une los puntos (3, 1) y (5, 5) (obtenidos al remplazar por el mínimo y el máximo valor del parámetro λ).

En resumen

- La expresión $\vec{p} = \vec{p_0} + \lambda\,\vec{d}$ recibe el nombre de **ecuación vectorial de la recta** o ecuación de la recta en la forma vectorial. $\vec{p_0}$ es el **vector posición** de la recta, cuando no pasa por el origen (que no es un vector ponderado de $\vec{d}$), $\vec{d}$ es el **vector director**, paralelo a la recta, y λ es un **parámetro** que, al tomar diferentes valores, nos entrega distintos puntos que forman la recta.

Actividades

1. **Determina la ecuación vectorial de la recta que pasa por dos puntos dados: $A(-4, 6)$ y $B(4, -2)$.**

2. **¿Se puede determinar la ecuación vectorial de la recta a partir de los puntos (1, 1) y (4, 4)? En caso afirmativo, ¿cuál es su ecuación vectorial?**

3. **Dado el punto $P(2, -2)$ y el punto $Q(-4, 4)$, ¿cuál es el punto medio del segmento PQ?**

4. **Dada la ecuación vectorial de la recta $\langle x, y\rangle = \langle 1, 2\rangle + \lambda\langle 4, 8\rangle$, determina tres puntos que pertenezcan a la recta.**

5. **¿A qué recta pertenecen los puntos $A(-1, -4)$, $B(1, 1)$ y $C(0, 5)$? Justifica.**

   A. $L: \langle x, y\rangle = \langle 1 + 2\lambda, -1 + 3\lambda\rangle$
   B. $L: \langle x, y\rangle = \langle -1 + 2\lambda, 3 - 2\lambda\rangle$
   C. $L: \langle x, y\rangle = \langle 2 - \lambda, -1 + 2\lambda\rangle$
   D. $L: \langle x, y\rangle = \langle -2 - \lambda, -3 + 2\lambda\rangle$
   E. Ninguna de las anteriores.

6. **Determina la ecuación vectorial de una recta paralela a $\langle x, y\rangle = \langle 2, -5\rangle + \lambda\langle 1, -4\rangle$; luego, grafica ambas rectas.**

UNIDAD 3 (98-155)C _Maquetación 1 13-07-11 9:26 Página 123

Ecuación vectorial de una recta y su ecuación cartesiana

Como ya sabemos, la ecuación vectorial de la recta está determinada por un punto y una dirección; por consiguiente, por un punto de la recta y un vector paralelo a ella.

Considera una recta L en el plano, cuyo vector director es $\vec{d} = \langle 6, 4 \rangle$ y A (5, 7) un punto perteneciente a ella.

ANALICEMOS...

- ¿Cuál es la ecuación vectorial de L? Explica.
- ¿Cómo se obtiene un punto B que pertenezca a la recta L? Justifica.
- ¿Cómo se obtiene la ecuación cartesiana de la recta L? Explica.
- Conocidos los puntos A y B, ¿se puede graficar la recta L?, ¿por qué?
- En general, ¿cómo se grafica una recta en el plano, a partir de su ecuación vectorial?

Remplazando valores en la ecuación vectorial, se pueden ubicar en el plano cartesiano dos puntos pertenecientes a la recta y, luego, graficarla. Observa:

Primer paso: determinar la ecuación vectorial de la recta.
Ya que la recta L pasa por el punto A, este es el vector posición:
$\langle x, y \rangle = \langle 5, 7 \rangle + \lambda \langle 6, 4 \rangle$ con λ, número real.

Segundo paso: para determinar un punto B se asigna un valor cualquiera a λ y se remplaza en la ecuación. Por ejemplo, si $\lambda = 2$, el punto B resultante es:

$B = (5, 7) + 2 \cdot (6, 4) = (5, 7) + (12, 8) = (17, 15)$

Tercer paso: se grafican los puntos A y B y se traza la línea que pasa por ellos para obtener la recta L.

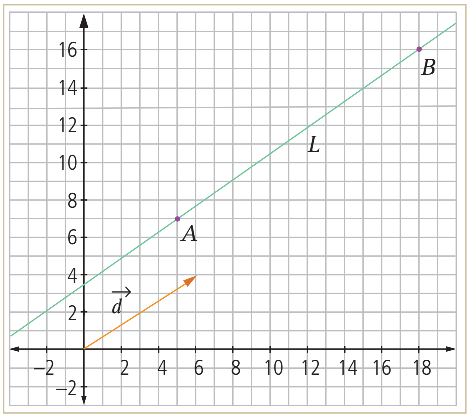
Cuarto paso: se calcula la ecuación cartesiana de la recta dados un punto de ella y su pendiente. La pendiente m se calcula a partir de las coordenadas del vector director $\langle d_1, d_2 \rangle$ como $m = \dfrac{d_2}{d_1}$.

$y - 7 = \dfrac{4}{6} \cdot (x - 5)$.

Ordenando, se obtiene $2x - 3y + 11 = 0$.

RECUERDA QUE...

La ecuación cartesiana de la recta, dada su pendiente m y un punto de ella (x_0, y_0) es: $y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$



Ejemplo 1

Dada la ecuación vectorial de la recta: $\langle x, y\rangle = \langle 5, 2\rangle + \lambda\langle 3, 1\rangle$, determina la correspondiente ecuación cartesiana.

Otra forma de obtener la ecuación cartesiana correspondiente es igualar componente a componente y despejar el parámetro λ en cada una de estas ecuaciones:

$$x = 5 + 3\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{x-5}{3}$$

$$y = 2 + \lambda \Rightarrow \lambda = y - 2$$

Luego, se igualan ambos parámetros y se despeja y:

$$\frac{x-5}{3} = y - 2$$

$$x - 5 = 3y - 6$$

$$y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \text{ (Ecuación cartesiana de la recta)}$$

Observa que la recta tiene pendiente $\frac{1}{3}$; mientras que su vector director es $\langle 3, 1\rangle$.

Ejemplo 2

Dada la ecuación cartesiana de la recta: $4x + 3y + 7 = 0$, determina la correspondiente ecuación vectorial.

Primer paso: para obtener el vector posición se requiere determinar un punto que pertenezca a la recta. Por ejemplo, se puede calcular el valor de y remplazando en la ecuación de la recta un valor para x.

Si $x = -1$, $4 \cdot (-1) + 3y + 7 = 0$

$$3y + 3 = 0$$

$$y = -1$$

Entonces, el vector posición es $\langle -1, -1\rangle$.

Segundo paso: para obtener el vector director se puede calcular la pendiente de la recta $m = \frac{d_2}{d_1}$ y, luego, escribir el vector director como $\langle d_1, d_2\rangle$.

$$4x + 3y + 7 = 0$$

$$3y = -4x - 7$$

$$y = -\frac{4}{3}x - \frac{7}{3}, \text{ es decir, } m = -\frac{4}{3}.$$

Luego un vector director es $\langle 3, -4\rangle$. Por lo tanto, una ecuación vectorial de la recta es: $\langle x, y\rangle = \langle -1, -1\rangle + \lambda\langle 3, -4\rangle$.

RECUERDA QUE...

- La ecuación cartesiana de la recta está dada por $ax + by + c = 0$, o bien $y = mx + n$.
- Dos rectas son paralelas si tienen igual pendiente.
- Dos rectas son perpendiculares si sus respectivas pendientes, m_1 y m_2, satisfacen $m_1 \cdot m_2 = -1$.

En resumen

- La ecuación de la recta en el plano se puede representar mediante:
  - la ecuación cartesiana de la recta: $ax + by + c = 0$.
  - la ecuación vectorial de la recta: $\langle x, y\rangle = \vec{p_0} + \lambda \vec{d} = \langle x_0, y_0\rangle + \lambda\langle d_1, d_2\rangle$, donde $\vec{d}$ es el vector director de la recta, $\vec{p_0}\ \langle x_0, y_0\rangle$ es el vector posición y λ es su parámetro.
- Si $\vec{d}$ es un vector director cuyas coordenadas son $\langle d_1, d_2\rangle$, la pendiente m de la recta correspondiente está dada por $m = \dfrac{d_2}{d_1}$.

Actividades

1. **Dada la ecuación vectorial de la recta $\langle x, y\rangle = \langle 1, 2\rangle + \lambda\langle 4, 8\rangle$, determina la ecuación cartesiana correspondiente.**

2. **Encuentra la ecuación cartesiana correspondiente a la recta que pasa por el punto (5, –2) y es paralela al vector $\vec{d} = \langle -2, 3\rangle$.**

3. **Encuentra la ecuación vectorial de la recta que pasa por el punto (–3, 2) y es paralela a la recta $y = 3x - 2$.**

4. **Decide si los puntos (0, 0), (0, 11) y (–3, 0) pertenecen a la recta anterior. Justifica tu decisión.**

5. **Determina la ecuación vectorial para cada recta.**

   $4x + 2 = 3y - 3$ $\quad$ $2x - 5y + 1 = 0$

6. **Indica cuál es la posición relativa entre las rectas dadas. Explica.**

   L_1: $x - y - 2 = 0$, L_2: $\langle x, y\rangle = \langle 1, 2\rangle + \lambda\langle 2, 2\rangle$

7. **De la recta $\langle x, y\rangle = \langle 2, -3\rangle + \lambda\langle 1, 2\rangle$ y el punto $P(2, 1)$, obtén la ecuación de la recta:**

   a. paralela a la dada que pasa por P.
   b. perpendicular a la dada que pasa por P.

8. **Obtén la recta que pasa por el punto $A(2, -1)$ y tiene la misma pendiente que:**

   a. $\langle x, y\rangle = \langle 0, 3\rangle + \lambda\langle 1, 1\rangle$
   b. $2x - 3y = 6$

Producto cruz y vectores en el espacio

Sergio intentó abrir una puerta batiente empujando en el centro de la puerta. Aunque finalmente lo consiguió, tuvo que aplicar más fuerza de la que pensaba. Andrea, en cambio, la empujó lo más afuera posible.

Analicemos...

- ¿Crees que Andrea tuvo que aplicar la misma fuerza que Sergio para abrir la puerta?, ¿por qué?
- Si se aplicara la misma fuerza en distintos puntos de la puerta, ¿se obtendría el mismo movimiento en torno a su eje? Explica.
- Si se aplica una fuerza, ¿en qué posición se obtiene el máximo giro?, ¿en qué posición se obtiene un giro nulo? Comenta con tus compañeros y compañeras.

Glosario

torque: magnitud resultante del producto del valor de una fuerza por su distancia a un punto de referencia.

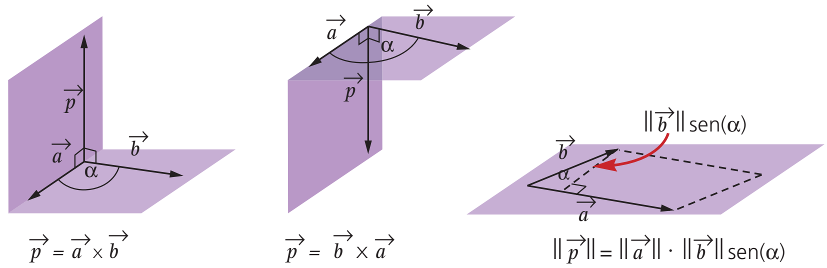
En la situación presentada podíamos observar que Sergio y Andrea aplicaban una fuerza sobre una puerta. Cuando una fuerza actúa sobre un cuerpo, la puerta en este caso, y producto de esta acción el cuerpo gira, se dice que se ha producido un **torque** sobre el cuerpo. Otro ejemplo es la fuerza que se aplica al pedal de la bicicleta que permite que gire el plato, y con él la cadena de la bicicleta.

El torque sobre el cuerpo se puede calcular como el **producto cruz** entre la fuerza aplicada y la posición del punto de aplicación de la fuerza respecto del eje de giro del cuerpo: $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$

El **producto cruz** o vectorial $\vec{a} \times \vec{b}$ entre dos vectores en el espacio se define como un tercer vector $\vec{p}$, perpendicular a ambos, $\vec{a}$ y $\vec{b}$. El módulo de $\vec{p} = \vec{a} \times \vec{b}$ corresponde al área del paralelogramo formado por $\vec{a}$ y $\vec{b}$; luego, $\|\vec{p}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \text{sen}(\alpha)$, donde α es el ángulo agudo formado por los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

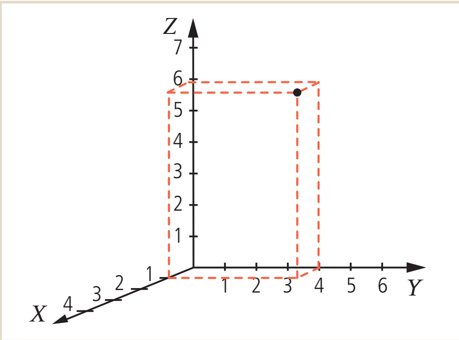
Pon atención

- El producto punto entre dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tiene como resultado un valor numérico (escalar); en cambio, el resultado del **producto cruz** es un nuevo vector.
- El producto cruz se define solo para vectores en el espacio. No tiene sentido para vectores en el plano.



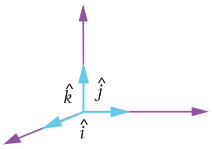
Para calcular el producto cruz de dos vectores, utilizando sus coordenadas cartesianas, es indispensable considerarlos en el espacio cartesiano, es decir, con sus tres coordenadas. Por ejemplo, si se considera el plano cartesiano como el piso de la sala, la tercera coordenada va a representar la altura que tiene el vector.

Así, en el gráfico siguiente está representado el punto $C = (1, 4, 6)$.



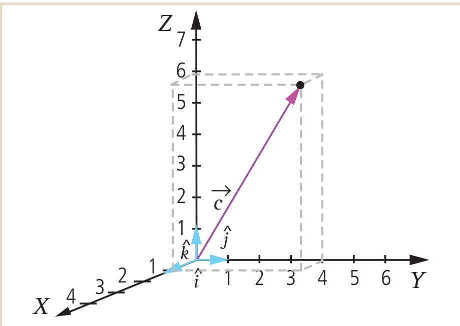
Una forma de calcular el producto cruz entre dos vectores es representando cada vector mediante los **vectores unitarios** cartesianos.

Los vectores unitarios asociados con las direcciones de los ejes coordenados cartesianos X, Y, Z, se designan por $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$, respectivamente. Permiten expresar los vectores por medio de sus componentes cartesianas. Así, $\hat{i} = \langle 1, 0, 0\rangle$, $\hat{j} = \langle 0, 1, 0\rangle$, $\hat{k} = \langle 0, 0, 1\rangle$.



Ejemplo

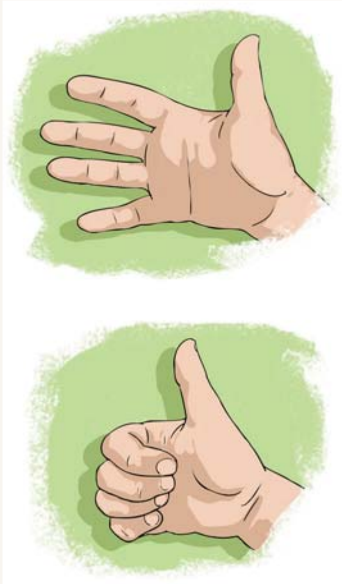
Observa la siguiente imagen en que se muestra $\vec{c} = \langle 1, 4, 6\rangle$.



De esta manera, el vector $\vec{c}$ se puede representar como:
$\vec{c} = \langle 1, 4, 6\rangle = \hat{i} + 4\hat{j} + 6\hat{k}$.

Pon atención

Si colocas los dedos de tu mano derecha de modo que apunten en la dirección y sentido del vector $\vec{a}$ y, luego, doblas los dedos apuntando hacia $\vec{b}$, la dirección y sentido de $\vec{a} \times \vec{b}$ están dados por el dedo pulgar extendido. Esto se conoce como la **regla de la mano derecha**.



Glosario

vectores unitarios: vectores cuya magnitud o módulo es igual a la unidad.

Pon atención

- Por definición, $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ y $\hat{k}$ son vectores perpendiculares entre sí; es decir: $\hat{\imath} \perp \hat{\jmath}$, $\hat{\jmath} \perp \hat{k}$, $\hat{k} \perp \hat{\imath}$.
- Aplicando la regla de la mano derecha, se cumple que:

$$\hat{\imath} \times \hat{\jmath} = \hat{k}$$
$$\hat{\imath} \times \hat{k} = -\hat{\jmath}$$
$$\hat{\jmath} \times \hat{\imath} = -\hat{k}$$
$$\hat{\jmath} \times \hat{k} = \hat{\imath}$$
$$\hat{k} \times \hat{\imath} = \hat{\jmath}$$
$$\hat{k} \times \hat{\jmath} = -\hat{\imath}$$

Observa cómo se calcula el producto cruz entre dos vectores, utilizando sus coordenadas cartesianas y los vectores unitarios. Sean dos vectores $\vec{A} = \langle a, b, c\rangle$ y $\vec{V} = \langle u, v, w\rangle$

$$\begin{aligned}
\vec{A} \times \vec{V} &= (a\hat{\imath} + b\hat{\jmath} + c\hat{k}) \times (u\hat{\imath} + v\hat{\jmath} + w\hat{k}) \\
&= au\,(\hat{\imath} \times \hat{\imath}) + av\,(\hat{\imath} \times \hat{\jmath}) + aw\,(\hat{\imath} \times \hat{k}) + bu\,(\hat{\jmath} \times \hat{\imath}) + bv\,(\hat{\jmath} \times \hat{\jmath}) \\
&\quad + bw\,(\hat{\jmath} \times \hat{k}) + cu\,(\hat{k} \times \hat{\imath}) + cv\,(\hat{k} \times \hat{\jmath}) + cw\,(\hat{k} \times \hat{k}) \\
&= av\,\hat{k} - aw\,\hat{\jmath} - bu\,\hat{k} + bw\,\hat{\imath} + cu\,\hat{\jmath} - cv\,\hat{\imath} \\
&= (bw - cv)\,\hat{\imath} + (cu - aw)\,\hat{\jmath} + (av - bu)\,\hat{k}
\end{aligned}$$

Ejemplos

Sean dos vectores $\vec{A} = \langle 3, 4, -1\rangle$ y $\vec{V} = \langle 2, -5, 6\rangle$:

1. $$\begin{aligned}
\vec{A} \times \vec{V} &= (3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} - \hat{k}) \times (2\hat{\imath} - 5\hat{\jmath} + 6\hat{k}) \\
&= 6\,(\hat{\imath} \times \hat{\imath}) + -15\,(\hat{\imath} \times \hat{\jmath}) + 18\,(\hat{\imath} \times \hat{k}) + 8\,(\hat{\jmath} \times \hat{\imath}) + -20\,(\hat{\jmath} \times \hat{\jmath}) \\
&\quad + 24\,(\hat{\jmath} \times \hat{k}) + -2\,(\hat{k} \times \hat{\imath}) + 5\,(\hat{k} \times \hat{\jmath}) + -6\,(\hat{k} \times \hat{k}) \\
&= -15\,\hat{k} + 18\,(-\hat{\jmath}) + 8\,(-\hat{k}) + 24\,\hat{\imath} + -2\,\hat{\jmath} + 5\,(-\hat{\imath}) \\
&= 19\,\hat{\imath} - 20\,\hat{\jmath} - 23\,\hat{k}
\end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned}
\vec{A} \times \vec{A} &= (3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} - \hat{k}) \times (3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} - \hat{k}) \\
&= 9\,(\hat{\imath} \times \hat{\imath}) + 12\,(\hat{\imath} \times \hat{\jmath}) + -3\,(\hat{\imath} \times \hat{k}) + 12\,(\hat{\jmath} \times \hat{\imath}) + 16\,(\hat{\jmath} \times \hat{\jmath}) \\
&\quad + -4\,(\hat{\jmath} \times \hat{k}) + -3\,(\hat{k} \times \hat{\imath}) + -4\,(\hat{k} \times \hat{\jmath}) + 1\,(\hat{k} \times \hat{k}) \\
&= 12\,\hat{k} + -3\,(-\hat{\jmath}) + 12\,(-\hat{k}) + -4\,\hat{\imath} + -3\,\hat{\jmath} + -4\,(-\hat{\imath}) \\
&= 0\,\hat{\imath} + 0\,\hat{\jmath} + 0\,\hat{k} = \vec{0}
\end{aligned}$$

El producto cruz cumple con las siguientes propiedades:

- es distributivo respecto de la suma de vectores. Es decir, $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c})$.
- $\vec{a} \times (\lambda\vec{b}) = \lambda\,(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \times \vec{b}$.
- el producto cruz de un vector con uno de sus ponderados es nulo. Es decir, $\vec{a} \times \lambda\vec{a} = \vec{0}$.
- no es conmutativo, ya que $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$.

En resumen

- Para representar vectores unitarios que están en los ejes X, Y y Z, en sentido positivo, utilizamos las letras $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ y $\hat{k}$, respectivamente.
- El **producto cruz**, de dos vectores $\vec{u} \times \vec{v}$, es un vector de módulo $|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \text{sen}(\alpha)$, con dirección perpendicular al plano determinado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$, y cuyo sentido se puede determinar mediante la regla de la mano derecha.