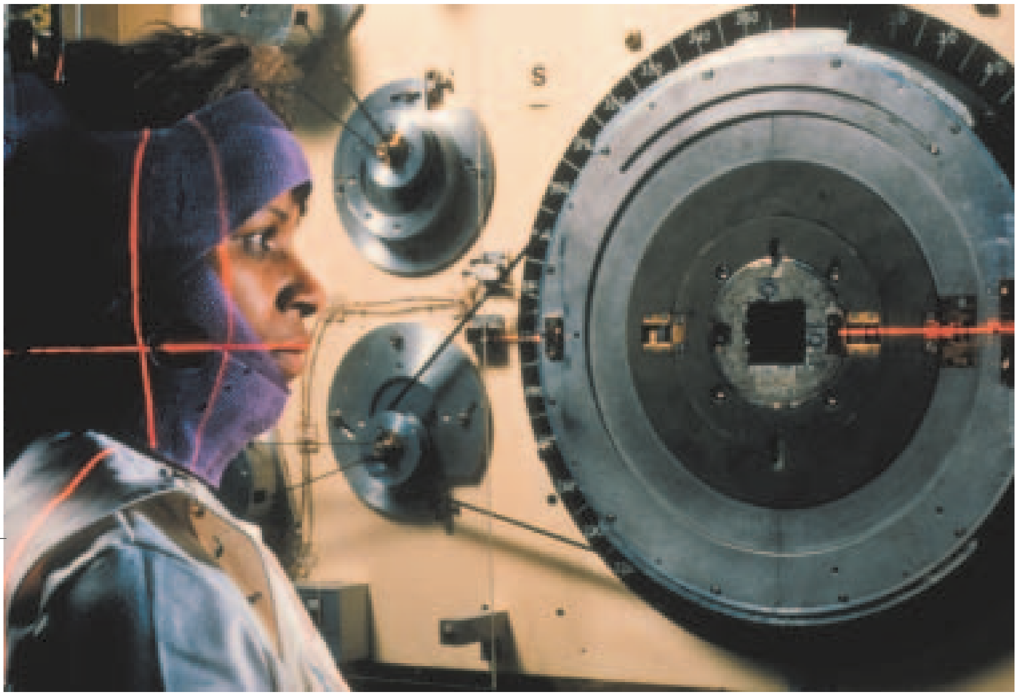
1 UNIDADES, CANTIDADES FÍSICAS Y VECTORES



La exactitud en las mediciones es indispensable en las aplicaciones médicas de la física. Los rayos láser que inciden sobre esta paciente con cáncer marcan el sitio de un tumor, el cual se bombardea entonces con un haz de neutrones de alta energía proveniente de la abertura cuadrada de la derecha. Los neutrones depositan su energía en el tumor, detienen su crecimiento y, en el caso ideal, lo destruyen totalmente. Dado que el angosto haz de neutrones está dirigido con gran exactitud, los tejidos saludables que rodean al tumor prácticamente no sufren daños.

? **Las partículas subatómicas empleadas en la terapia contra el cáncer se pueden dirigir con una exactitud de 100 micras. ¿Cuántos glóbulos sanguíneos humanos en fila cubrirían esa distancia?**

¿Por qué estudiar física? Por dos motivos. Uno es porque la física es una de las ciencias más fundamentales. Los científicos de todas las disciplinas aplican las ideas de la física, desde los químicos quienes estudian la estructura de las moléculas hasta los paleontólogos quienes tratan de reconstruir la forma de andar de los dinosaurios. Los principios de la física desempeñan un papel fundamental en el esfuerzo científico por entender cómo las actividades humanas afectan a la atmósfera y a los océanos, y en la búsqueda de otras fuentes alternas de energía. También, la física es la base de toda la ingeniería y la tecnología. Ningún ingeniero podría diseñar un dispositivo práctico, sin antes entender sus principios básicos. No sería posible diseñar un reproductor de DVD, un televisor de pantalla plana, una nave interplanetaria ni tan siquiera una mejor ratonera, sin antes haber entendido las leyes básicas de la física.

Pero hay otra razón. El estudio de la física es una aventura que el lector encontrará estimulante, a veces frustrante y en ocasiones dolorosa, pero con frecuencia proporcionará abundantes beneficios y satisfacciones. La física despertará en usted su sentido de lo bello, así como su inteligencia racional. Lo que conocemos del mundo físico se basa en los cimientos establecidos por gigantes como Galileo, Newton, Maxwell y Einstein, cuya influencia se ha extendido más allá de la ciencia para afectar profundamente las formas en que vivimos y pensamos. El lector podrá compartir la emoción de esos descubrimientos cuando aprenda a usar la fí-

sica para resolver problemas prácticos y entender los fenómenos cotidianos. Si alguna vez se ha preguntado por qué el cielo es azul, cómo pueden viajar las ondas de radio por el espacio, o cómo un satélite permanece en órbita, encontrará las respuestas en la física básica. Sobre todo, apreciará la física como un logro sobresaliente del intelecto humano en su lucha por entender el mundo y la humanidad.

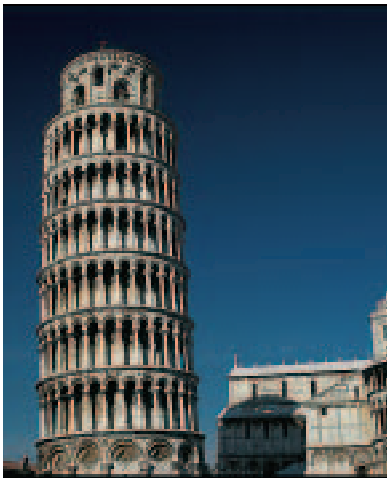
En este capítulo inicial repasaremos algunos conceptos importantes que necesitaremos en nuestro estudio. Comentaremos la naturaleza de la física teórica y el uso de modelos idealizados para representar los sistemas físicos. Presentaremos los sistemas de unidades empleados para describir cantidades físicas y veremos la forma de describir la exactitud de un número. Estudiaremos ejemplos de problemas que no tienen (o para los que no nos interesa obtener) una respuesta exacta y en los que las estimaciones aproximadas son útiles e interesantes. Por último, repasaremos varios aspectos de los vectores y el álgebra vectorial que necesitaremos para describir y analizar cantidades físicas, como velocidad y fuerza, que tienen dirección además de magnitud.

1.1 | La naturaleza de la física

La física es una ciencia *experimental*. Los físicos observan los fenómenos naturales y tratan de encontrar los patrones y principios que los relacionen. Dichos patrones se denominan teorías físicas o, si están bien establecidos y se usan ampliamente, leyes o principios físicos.

CUIDADO Decir que una idea es una teoría no implica que se trate de una divagación o de un concepto no comprobado. Más bien, una teoría es una explicación de fenómenos naturales basada en observaciones y en los principios fundamentales aceptados. Un ejemplo es la teoría de la evolución biológica, que es el resultado de extensas investigaciones y observaciones de varias generaciones de biólogos.

El desarrollo de la teoría física exige creatividad en todas sus etapas. El físico debe aprender a hacer las preguntas apropiadas, diseñar experimentos para tratar de contestarlas y deducir conclusiones apropiadas de los resultados. La figura 1.1 muestra dos famosas instalaciones experimentales.



(a)

(b)

1.1 Dos laboratorios de investigación. (a) La Torre inclinada en Pisa, Italia. Según la leyenda, Galileo estudió el movimiento de cuerpos en caída libre soltándolos desde la torre. Se dice que también estudió el movimiento de los péndulos observando la oscilación del candelabro de la catedral que está atrás de la torre. (b) El telescopio espacial Hubble es el primer telescopio importante que operó fuera de la atmósfera terrestre; sus sensibles instrumentos miden luz visible, ultravioleta y del infrarrojo cercano procedente de objetos astronómicos. El telescopio espacial se ha usado para estudiar fenómenos desde erupciones en las lunas de Júpiter hasta los centros de galaxias lejanas. Aquí se muestra en marzo de 2002 mientras estaba siendo reparado en órbita por la tripulación del transbordador espacial *Columbia*.

Según la leyenda, Galileo Galilei (1564-1642) dejó caer objetos ligeros y pesados desde la Torre Inclinada de Pisa (Fig. 1.1a) para averiguar si sus velocidades de caída eran iguales o diferentes. Galileo sabía que sólo la investigación experimental podría darle la respuesta. Examinando los resultados de sus experimentos (que en realidad fueron mucho más complejos de lo que cuenta la leyenda), dio el salto inductivo al principio, o teoría, de que la aceleración de un cuerpo que cae es independiente de su peso.

El desarrollo de teorías físicas como la de Galileo siempre es un proceso bidireccional que comienza y termina con observaciones o experimentos. El camino a menudo es indirecto, con callejones sin salida, equivocaciones y el abandono de teorías infructuosas en favor de otras más prometedoras. La física no es una mera colección de hechos y principios; también es el *proceso* que nos lleva a los principios generales que describen el comportamiento del universo físico.

Ninguna teoría se considera como la verdad final o definitiva; siempre cabe la posibilidad de que nuevas observaciones obliguen a modificarla o desecharla. Es inherente en las teorías físicas que podemos demostrar su falsedad encontrando comportamientos no congruentes con ellas, pero nunca podemos probar que una teoría siempre es correcta.

Volviendo a Galileo, supongamos que dejamos caer una pluma y una bala de cañón. Sin duda *no* caen a la misma velocidad. Esto no significa que Galileo estuviera errado, sino que su teoría era incompleta. Si soltamos esos objetos *en un vacío* para eliminar los efectos del aire, sí caerán a la misma velocidad. La teoría de Galileo tiene un **intervalo de validez**: sólo es válida para objetos cuyo peso es mucho mayor que la fuerza ejercida por el aire (debido a su resistencia y a la flotación del objeto). Los objetos como las plumas y paracaídas obviamente se salen del intervalo.

Toda teoría física tiene un intervalo de validez fuera del cual no es aplicable. Es común que un nuevo avance en física extienda el intervalo de validez de un principio. Las leyes del movimiento y de gravitación de Newton extendieron enormemente, medio siglo después, el análisis de la caída de los cuerpos que hizo Galileo.

1.2 | Cómo resolver problemas en física

En algún punto de sus estudios, casi todos los estudiantes de física sienten que, pese a entender los conceptos, simplemente no pueden resolver los problemas. Sin embargo, en física, entender verdaderamente un concepto o principio es lo mismo que saber aplicarlo a diversos problemas prácticos. Aprender a resolver problemas es absolutamente indispensable; es imposible *saber* física sin poder *hacer* física.

¿Cómo aprendemos a resolver problemas de física? En todos los capítulos de este libro, el lector encontrará *Estrategias para resolver problemas* que sugieren técnicas para plantear y resolver problemas de forma eficiente y correcta. Después de cada *Estrategia para resolver problemas* hay uno o más *Ejemplos* resueltos que muestran esas técnicas en acción. (Las *Estrategias para resolver problemas* también ayudan a evitar algunas técnicas *incorrectas* que podríamos sentirnos tentados a usar.) También hay ejemplos adicionales que no están asociados a una *Estrategia para resolver problemas* en particular. Recomendamos al lector estudiar detenidamente esas estrategias y ejemplos, y resolverlos por su cuenta.

En física se usan diferentes técnicas para resolver distintos tipos de problemas, y es por ello que este libro ofrece docenas de *Estrategias para resolver problemas*. No obstante, sea cual sea el tipo de problema, hay ciertos pasos básicos que se deben seguir siempre. (Esos mismos pasos son útiles en matemáticas, ingeniería,

-YOUN.8684.cp01.001-039.CTPv3 5/12/04 12:26 PM Page 4

Estrategia para resolver problemas

Cómo resolver problemas de física

IDENTIFICAR *los conceptos relevantes:* Primero, decida qué ideas de la física son relevantes para el problema. Aunque este paso no implica hacer cálculos, a veces es la parte más difícil. Nunca lo omita; si desde el principio se escoge el enfoque equivocado, el problema se dificultará innecesariamente, e incluso podría llevar a una respuesta errónea.

A estas alturas también se debe identificar la **incógnita** del problema: la cantidad cuyo valor se desea encontrar. Podría ser la rapidez con que un proyectil choca contra el suelo, la intensidad del sonido producido por una sirena o la fuerza de un campo magnético generado por un electroimán. (En ocasiones, la meta será hallar una expresión matemática para la incógnita, no un valor numérico. Otras veces, el problema tendrá más de una incógnita.) Esta variable es la meta del proceso de la resolución de problemas; asegúrese de no perderla de vista durante los cálculos.

PLANTEAR *el problema:* Si resulta apropiado, dibuje la situación descrita en el problema. Con base en los conceptos que escogió en el paso de *Identificar*, seleccione las ecuaciones que usará para resolver el problema y decida cómo las usará.

EJECUTAR *la solución:* En este paso, se "hacen las cuentas". Antes de meterse en los cálculos, haga una lista de las cantidades conocidas y desconocidas, e indique cuál o cuáles son las variables meta. Después, despeje las incógnitas de las ecuaciones.

EVALUAR *la respuesta:* La meta de la resolución de problemas en física no es sólo obtener un número o una fórmula; es entender mejor. Ello implica examinar la respuesta para ver qué nos dice. En particular, pregúntese: "¿Es lógica esta respuesta?" Si la incógnita era el radio de la Tierra y la respuesta es 6.38 cm (¡o un número negativo!), hubo algún error en el proceso de resolución de problemas. Revise su trabajo y modifique la solución según sea necesario.

química y muchos otros campos.) En este libro, hemos organizado los pasos en cuatro etapas para la resolución de un problema.

Todas las *Estrategias para resolver problemas* y *Ejemplos* de este libro seguirán estos cuatro pasos. (En algunos casos se combinarán los primeros dos o tres pasos.) Le recomendamos seguir los mismos pasos al resolver problemas por su cuenta.

Modelos idealizados

Comúnmente usamos la palabra "modelo" para referirnos a una réplica miniatura (digamos, de un ferrocarril) o a una persona que exhibe ropa (o se exhibe sin ropa). En física, un **modelo** es una versión simplificada de un sistema físico demasiado complejo como para analizarse con todos sus pormenores.

Por ejemplo, supongamos que nos interesa analizar el movimiento de una pelota de béisbol lanzada al aire. ¿Qué tan complicado es el problema? La pelota no es perfectamente esférica ni perfectamente rígida: tiene costuras y está girando. El viento y la resistencia del aire afectan su movimiento, la Tierra gira, el peso de la pelota varía un poco al cambiar su distancia respecto al centro de la Tierra, etc. Si tratamos de incluir todo esto, la complejidad del análisis nos abrumará. En vez de ello, inventamos una versión simplificada del problema. Omitimos el tamaño y la forma de la pelota representándola como un objeto puntual, o **partícula**. Omitimos la resistencia del aire haciendo que la pelota se mueva en el vacío, nos olvidamos de la rotación terrestre y suponemos un peso constante. Ahora ya tenemos un problema manejable. Analizaremos este modelo con detalle en el capítulo 3.

Para crear un modelo idealizado del sistema, debemos pasar por alto muchos efectos menores y concentrarnos en las características más importantes. Claro que no debemos omitir demasiadas cosas. Si ignoramos totalmente la gravedad, nues-

-YOUN.8684.cp01.001-039.CTPv3 5/12/04 12:26 PM Page 5

tro modelo predecirá que si lanzamos la pelota hacia arriba ésta se moverá en línea recta y desaparecerá en el espacio. Necesitamos criterio y creatividad para lograr un modelo que simplifique lo suficiente un problema, sin omitir sus características esenciales.

Al usar un modelo para predecir el comportamiento de un sistema, la validez de la predicción está limitada por la validez del modelo. La predicción de Galileo respecto a la caída de los cuerpos corresponde a un modelo idealizado que no incluye los efectos de la resistencia del aire. El modelo funciona bien para una bala de cañón, pero no para una pluma.

El concepto de modelos idealizados es muy importante en física y en todas las tecnologías. Al aplicar principios físicos a sistemas complejos, siempre usamos modelos idealizados y debemos tener presentes los supuestos en que se basan. De hecho, los mismos principios de la física se expresan en términos de modelos idealizados; hablamos de masas puntuales, cuerpos rígidos, aislantes ideales, etc. Esos modelos desempeñan un papel crucial en este libro. Trate de distinguirlos al estudiar las teorías físicas y sus aplicaciones a problemas específicos.

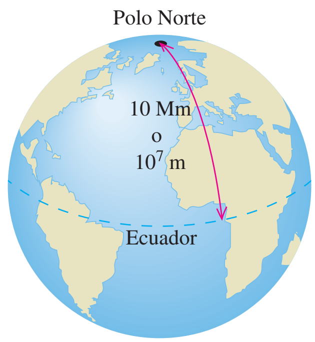
1.3 | Estándares y unidades

Como vimos en la sección 1.1, la física es una ciencia experimental. Los experimentos requieren mediciones cuyos resultados suelen describirse con números. Un número empleado para describir cuantitativamente un fenómeno físico es una **cantidad física**. Dos cantidades físicas que describen a una persona son su peso y estatura. Algunas cantidades físicas son tan básicas que sólo podemos definirlas describiendo la forma de medirlas, es decir, con una **definición operativa**. Ejemplos de ello son medir una distancia con una regla, o un lapso de tiempo con un cronómetro. En otros casos definimos una cantidad física describiendo la forma de calcularla a partir de otras cantidades *medibles*. Así, podríamos definir la velocidad media de un objeto como la distancia recorrida (medida con una regla) entre el tiempo de recorrido (medido con un cronómetro).

Al medir una cantidad, siempre la comparamos con un estándar de referencia. Si decimos que un Porsche Carrera GT tiene una longitud de 4.56 m, queremos decir que es 4.56 veces más largo que una vara de metro, que por definición tiene 1 m de largo. Este estándar define una **unidad** de la cantidad. El metro es una unidad de distancia, y el segundo, de tiempo. Al describir una cantidad física con un número, siempre debemos especificar la unidad empleada; describir una distancia como “4.56” no significa nada.

Las mediciones exactas y confiables exigen unidades inmutables que los observadores puedan duplicar en distintos lugares. El sistema de unidades empleado por los científicos e ingenieros en todo el mundo se denomina comúnmente “sistema métrico”, pero desde 1960 su nombre oficial es **Sistema Internacional,** o **SI**. En el apéndice A se presenta una lista de todas las unidades del SI y se definen las fundamentales.

Las definiciones de las unidades básicas del sistema métrico han evolucionado. Cuando la Academia Francesa de Ciencias estableció el sistema en 1791, el metro se definió como una diezmillonésima de la distancia entre el Polo Norte y el Ecuador (Fig. 1.2). El segundo se definió como el tiempo que tarda un péndulo de 1 m de largo en oscilar de un lado a otro. Estas definiciones eran poco prácti-



1.2 En 1791, se definió que la distancia entre el Polo Norte y el Ecuador es por definición exactamente 10^7 m. Con la definición moderna del metro, esta distancia es aproximadamente 0.02% más que 10^7 m.

cas y difíciles de duplicar con precisión, por lo que se han refinado por acuerdo internacional.

Tiempo

De 1889 a 1967, la unidad de tiempo se definió como cierta fracción del día solar medio (el tiempo medio entre llegadas sucesivas del Sol al cenit). El estándar actual, adoptado en 1967, es mucho más preciso; se basa en un reloj atómico que usa la diferencia de energía entre los dos estados energéticos más bajos del átomo de cesio. Al bombardearse con microondas de cierta frecuencia exacta, el átomo sufre una transición entre dichos estados. Se define un **segundo** como el tiempo que tardan 9,192,631,770 ciclos de esta radiación.

Longitud

En 1960 se estableció también un estándar atómico para el metro, utilizando la longitud de onda de la luz anaranjada-roja emitida por átomos de kriptón (^{86}Kr) en un tubo de descarga de luz. Utilizando este estándar de longitud, se comprobó que la rapidez de la luz en el vacío era de 299,792,458 m/s. En noviembre de 1983, el estándar se modificó otra vez de modo que la rapidez de la luz en el vacío fuera, *por definición*, exactamente de 299,792,458 m/s. El metro se define de modo que sea congruente con este número y con la definición anterior del segundo. Así, la nueva definición de **metro** es la distancia que recorre la luz en el vacío en 1/299,792,458 s. Éste es un estándar de longitud mucho más preciso que el basado en una longitud de onda de la luz.

Masa

El estándar de masa, el **kilogramo,** se define como la masa de cierto cilindro de aleación platino-iridio guardado en la Oficina Internacional de Pesos y Medidas en Sèvres, cerca de París. Un estándar atómico de masa sería más fundamental, pero aún no podemos medir masas a escala atómica con tanta exactitud como a escala macroscópica. El *gramo* (que no es una unidad fundamental) es 0.001 kilogramos.

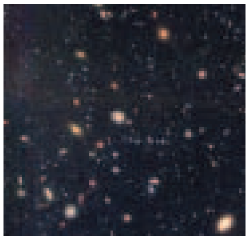
Prefijos de unidades

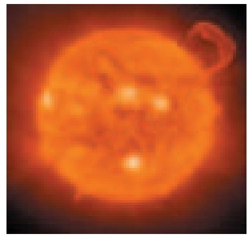
Ya definidas las unidades fundamentales, es fácil introducir unidades más grandes y pequeñas para las mismas cantidades físicas. En el sistema métrico estas otras unidades siempre se relacionan con las fundamentales (o, en el caso de la masa, con el gramo) por múltiplos de 10 o $\frac{1}{10}$. Así, un kilómetro (1 km) son 1000 metros, y un centímetro (1 cm) es $\frac{1}{100}$ m. Es común expresar estos múltiplos en notación exponencial: $1000 = 10^3$, $\frac{1}{1000} = 10^{-3}$, etc. Con esta notación, 1 km $= 10^3$ m y 1 cm $= 10^{-2}$ m.

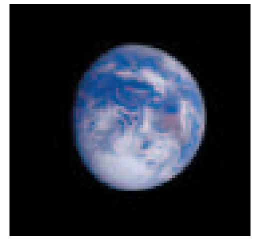
Los nombres de las unidades adicionales se obtienen agregando un **prefijo** al nombre de la unidad fundamental. Por ejemplo, el prefijo “kilo”, abreviado k, siempre indica una unidad 1000 veces mayor; así:

$$
\begin{aligned}
1 \text{ kilómetro} &= 1 \text{ km} = 10^3 \text{ metros} = 10^3 \text{ m.}\\
1 \text{ kilogramo} &= 1 \text{ kg} = 10^3 \text{ gramos} = 10^3 \text{ g.}\\
1 \text{ kilowatt} &= 1 \text{ kW} = 10^3 \text{ watts} = 10^3 \text{ W.}
\end{aligned}
$$

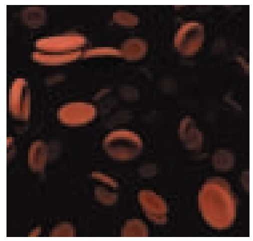
-YOUN.8684.cp01.001-039.CTPv3 5/12/04 12:26 PM Page 7

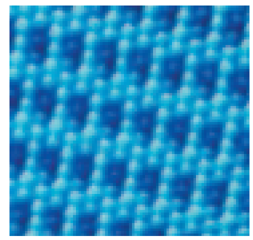

(a) 10^{26} m

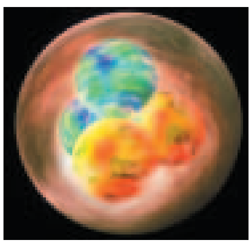

(b) 10^{11} m


(c) 10^{7} m


(d) 1 m


(e) 10^{-6} m


(f) 10^{-10} m


(g) 10^{-14} m

? **1.3** Algunas longitudes representativas del Universo. (a) Las galaxias más distantes están a unos 10^{26} m (10^{23} km). (b) El Sol está a 1.50×10^{11} m (1.50×10^{8} km) de la Tierra. (c) El diámetro de la Tierra es de 1.28×10^{7} m (12 800 km). (d) Un ser humano representativo tiene una estatura de 1.7 m (170 cm). (e) Los glóbulos rojos humanos tienen un diámetro aproximado de 8×10^{-6} m (0.008 mm, o sea, 8 μm). (f) Estos átomos de oxígeno, que se muestran formados en la superficie de un cristal, tienen un radio aproximado de 10^{-10} m (10^{-4} μm). (g) El radio de un núcleo atómico típico (que se muestra en una concepción artística) es del orden de 10^{-14} m (10^{-5} nm).

Una tabla en el interior de la contraportada de este libro da los prefijos estándar del SI, con sus significados y abreviaturas.

He aquí varios ejemplos del uso de múltiplos de 10 y sus prefijos con las unidades de longitud, masa y tiempo. La figura 1.3 muestra cómo los prefijos ayudan a describir distancias tanto grandes como pequeñas.

Longitud

1 nanómetro = 1 nm = 10^{-9} m (unos cuantos diámetros del átomo más grande)
1 micrómetro = 1 μm = 10^{-6} m (tamaño de algunas bacterias y células vivas)
1 milímetro = 1 mm = 10^{-3} m (diámetro del punto de un bolígrafo)
1 centímetro = 1 cm = 10^{-2} m (diámetro de un meñique)
1 kilómetro = 1 km = 10^{3} m (un paseo de 10 minutos)

Masa

1 microgramo = 1 μg = 10^{-6} g = 10^{-9} kg (masa de una partícula pequeña de polvo)
1 miligramo = 1 mg = 10^{-3} g = 10^{-6} kg (masa de un grano de sal)
1 gramo = 1 g = 10^{-3} kg (masa de un sujetador de papeles)

-YOUN.8684.cp01.001-039.CTPv3 5/12/04 12:26 PM Page 8

Tiempo

1 nanosegundo = 1 ns = 10^{-9} s (tiempo en que la luz recorre 0.3 m)
1 microsegundo = 1 μs = 10^{-6} s (tiempo en que un transbordador espacial en órbita recorre 8 mm)
1 milisegundo = 1 ms = 10^{-3} s (tiempo en que el sonido viaja 0.35 m)

El sistema británico

1.4 Muchos objetos comunes usan unidades tanto del SI como británicas. Un ejemplo es este velocímetro de un automóvil construido en EE.UU., que indica la rapidez tanto en kilómetros por hora como en millas por hora.

Por último, mencionamos el sistema británico de unidades que se usa sólo en Estados Unidos y otros pocos países, aunque en casi todos está siendo reemplazado por el SI. Hoy en día las unidades británicas se definen oficialmente en términos de las del SI, como sigue:

Longitud: 1 pulgada = 2.54 cm (exactamente)
Fuerza: 1 libra = 4.448221615260 newton (exactamente)

El newton, que se abrevia N, es la unidad de fuerza en el SI. La unidad británica de tiempo es el segundo, definido igual que en el SI. En física, las unidades británicas se usan sólo en mecánica y termodinámica; no existe un sistema británico de unidades eléctricas.

En este libro usaremos unidades SI en todos los ejemplos y problemas, pero ocasionalmente daremos equivalentes aproximados en unidades británicas. Al resolver problemas con unidades SI, el lector puede hacer la conversión a los equivalentes británicos aproximados, si le resultan más conocidos (véase Fig. 1.4), pero debe tratar de pensar sólo en unidades SI.

1.4 | Consistencia y conversiones de unidades

Usamos ecuaciones para expresar las relaciones entre cantidades físicas representadas por símbolos algebraicos. Cada símbolo denota siempre un número y una unidad. Por ejemplo, d podría representar una distancia de 10 m, t un tiempo de 5 s y v una rapidez de 2 m/s.

Toda ecuación debe ser **dimensionalmente consistente**. No podemos sumar manzanas y automóviles; sólo podemos sumar o igualar dos términos si tienen las mismas unidades. Por ejemplo, si un cuerpo que viaja con rapidez constante v recorre una distancia d en un tiempo t, estas cantidades están relacionadas por la ecuación

$$d = vt \tag{1.1}$$

si d se mide en metros, el producto vt también debe expresarse en metros. Con los números anteriores como ejemplo, escribimos

$$10\ \text{m} = \left(2\ \frac{\text{m}}{\cancel{\text{s}}}\right)(5\ \cancel{\text{s}})$$

Como la unidad 1/s del miembro derecho de la ecuación cancela a s, el producto vt está en metros, como debe ser. En los cálculos, las unidades se tratan igual que los símbolos algebraicos en cuanto a la multiplicación y la división.

-YOUN.8684.cp01.001-039.CTPv3 5/12/04 12:26 PM Page 9

CUIDADO Cuando un problema requiere de cálculos con números y unidades, *siempre* escriba los números con las unidades correctas en todo el cálculo, como en el ejemplo. Esto es muy útil, pues ayuda a verificar los cálculos. Si en algún momento una ecuación o expresión tiene unidades inconsistentes, es que hay un error. Aquí siempre llevaremos unidades en todos los cálculos, y recomendamos sobremanera al lector hacer lo mismo al resolver los problemas.

Estrategia para resolver problemas

Conversiones de unidades

IDENTIFICAR *los conceptos pertinentes:* La conversión de unidades es importante, pero también lo es saber cuándo se requiere. En general, lo mejor es usar las unidades SI fundamentales (longitudes en metros, masas en kilogramos y tiempo en segundos) dentro de un problema. Si la respuesta se debe dar en otras unidades (kilogramos, gramos u horas, por ejemplo), espere hasta el final para efectuar la conversión. En los ejemplos que siguen, nos concentraremos exclusivamente en la conversión de unidades, así que omitiremos el paso de *Identificar*.

PLANTEAR *el problema y* **EJECUTAR** *la solución:* Las unidades se multiplican y dividen igual que los símbolos algebraicos ordinarios. Esto facilita la conversión de una cantidad de un conjunto de unidades a otro. La idea clave es que podemos expresar la misma cantidad física en dos unidades distintas y formar una igualdad.

Por ejemplo, al decir 1 min = 60 s, no implicamos que el número 1 es igual al número 60, sino que 1 min representa el mismo intervalo de tiempo que 60 s. Por ello, el cociente (1 min)/ (60 s) es igual a 1, lo mismo que su recíproco (60 s)/(1 min). Podemos multiplicar una cantidad por cualquiera de estos factores, sin alterar el significado físico de la cantidad. Para averiguar cuántos segundos hay en 3 min, escribimos

$$3\ \text{min} = (3\ \cancel{\text{min}})\left(\frac{60\ \text{s}}{1\ \cancel{\text{min}}}\right) = 180\ \text{s}$$

EVALUAR *la respuesta:* Si convertimos las unidades correctamente las unidades no deseadas se eliminarán, como en el ejemplo. Si hubiéramos multiplicado 3 min por (1 min)/(60 s), el resultado habría sido $\frac{1}{20}\ \text{min}^2/\text{s}$, una forma un tanto rara de medir el tiempo. Para asegurarse de convertir bien las unidades, debe incluirlas en *todas* las etapas del cálculo.

Por último, verifique si la respuesta es lógica. ¿El resultado 3 min = 180 s es razonable? Sí; el segundo es más pequeño que el minuto, por lo que habrá más segundos que minutos en el mismo intervalo de tiempo.

Ejemplo 1.1

Conversión de unidades de rapidez

El récord oficial de rapidez terrestre es de 1228.0 km/h, establecido por Andy Green el 15 de octubre de 1997 en el auto a reacción *Thrust SSC*. Exprese esta rapidez en m/s.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR, PLANTEAR y EJECUTAR: El prefijo k indica 10^3, por lo que 1228.0 km/h = 1228.0×10^3 m/h. Sabemos también que hay 3600 s en 1 h, así que debemos combinar la rapidez de 1228.0×10^3 m/h y un factor de 3600. Pero, ¿debemos multiplicar o dividir por 3600? Si tratamos el factor como número sin unidades, tendremos que adivinar.

El proceder correcto es incluir las unidades en el factor, el cual acomodaremos a modo de eliminar la unidad de horas:

$$1228.0\ \text{km/h} = \left(1228.0 \times 10^3 \frac{\text{m}}{\cancel{\text{h}}}\right)\left(\frac{1\ \cancel{\text{h}}}{3600\ \text{s}}\right) = 341.11\ \text{m/s}$$

Si multiplicáramos por (3600 s)/(1 h) en vez de (1 h)/(3600 s), las horas no se cancelarían, y sería fácil detectar el error. La *única* forma de estar seguro de haber convertido correctamente las unidades es llevarlas durante todo el cálculo.

EVALUAR: Aunque el lector seguramente tiene una buena idea de la magnitud de una rapidez expresada en kilómetros por hora, los metros por segundo probablemente son un poco más misteriosos. Cabe señalar que, con cada paso, un adulto representativo avanza aproximadamente un metro, y que un buen ritmo para caminar es de un paso por segundo. Así, ese adulto camina con una rapidez aproximada de 1 m/s. En comparación, una rapidez de 341.11 m/s es en verdad elevada.

Ejemplo 1.2 Conversión de unidades de volumen

El diamante tallado más grande del mundo es la Primera Estrella de África (montada en el cetro real británico y guardado en la Torre de Londres). Su volumen es de 1.84 pulgadas cúbicas. Exprese su volumen en centímetros cúbicos y en metros cúbicos.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR, PLANTEAR y EJECUTAR: Para convertir pulgadas cúbicas en centímetros cúbicos, multiplicamos por $[(2.54\ \text{cm})/(1\ \text{pulg})]^3$, no sólo (2.54 cm)/(1 pulg). Tenemos

$$1.84\ \text{pulg}^3 = (1.84\ \text{pulg}^3)\left(\frac{2.54\ \text{cm}}{1\ \text{pulg}}\right)^3$$

$$= (1.84)(2.54)^3 \frac{\cancel{\text{pulg}^3}\ \text{cm}^3}{\cancel{\text{pulg}^3}} = 30.2\ \text{cm}^3$$

También, $1\ \text{cm} = 10^{-2}\ \text{m}$, y

$$30.2\ \text{cm}^3 = (30.2\ \text{cm}^3)\left(\frac{10^{-2}\ \text{m}}{1\ \text{cm}}\right)^3$$

$$= (30.2)(10^{-2})^3 \frac{\cancel{\text{cm}^3}\ \text{m}^3}{\cancel{\text{cm}^3}} = 30.2 \times 10^{-6}\ \text{m}^3$$

EVALUAR: Nuestra respuesta muestra que mientras que 1 centímetro es 10^{-2} de un metro (es decir, $1\ \text{cm} = 10^{-2}\ \text{m}$), un centímetro cúbico ($1\ \text{cm}^3$) **no** es 10^{-2} de un metro cúbico. Más bien, es el volumen de un cubo cuyos lados son 1 cm de largo. Así, $1\ \text{cm}^3 = (1\ \text{cm})^3 = (10^{-2}\text{m})^3 = (10^{-2})^3\text{m}^3$ o $1\ \text{cm}^3 = 10^{-6}\text{m}^3$.

1.5 | Incertidumbre y cifras significativas

Las mediciones siempre tienen incertidumbre. Si medimos el espesor de la portada de este libro con una regla común, la medición sólo será confiable al milímetro más cercano, y el resultado será de 3 mm. Sería *erróneo* dar este resultado como 3.00 mm; dadas las limitaciones del instrumento de medición, no puede saberse si el espesor real es de 3.00 mm, 2.85 mm o 3.11 mm. Pero si se usa un micrómetro, que mide distancias de forma confiable al 0.01 mm más cercano, el resultado será 2.91 mm. La distinción entre estas dos mediciones radica en su **incertidumbre.** La medida con micrómetro tiene menor incertidumbre; es más exacta. La incertidumbre también se llama **error,** porque indica la máxima diferencia probable entre el valor medido y el real. La incertidumbre o error de un valor medido depende de la técnica empleada.

A menudo indicamos la **exactitud** de un valor medido —es decir qué tanto creemos que se acerca al valor real— escribiendo el número, el símbolo $\pm$ y un segundo número que indica la incertidumbre. Si el diámetro de una varilla se da como 56.47 ± 0.02 mm, esto implica que es poco probable que el valor real sea menor que 56.45 mm o mayor que 56.49 mm. En una notación abreviada común, 1.6454(21) significa 1.6454 ± 0.0021. Los números entre paréntesis indican la incertidumbre de los dígitos finales del número principal.

También podemos expresar la exactitud en términos del **error fraccionario** o **porcentaje de error** máximo probable (también llamados *incertidumbre fraccionaria* o *porcentaje de incertidumbre*). Un resistor rotulado como "47 ohms $\pm$ 10%" probablemente tiene una resistencia real que difiere de 47 ohms en menos del 10% de 47 ohms, o sea, unos 5 ohms. Es probable que la resistencia esté entre 42 y 52 ohms. En el caso del diámetro de la varilla antes citada, el error fraccionario es de (0.02 mm)/(56.47 mm), que es aproximadamente 0.0004; el porcentaje de error es (0.0004)(100%) o 0.04%. Incluso porcentajes de error muy pequeños pueden ser muy significativos (Fig. 1.5).

1.5 Este espectacular percance se debió a un porcentaje de error muy pequeño: recorrer unos cuantos metros de más en un viaje de cientos de miles de metros.

En muchos casos, no se da explícitamente la incertidumbre de un número, sino que se indica con el número de dígitos informativos, o **cifras significativas**, en el valor medido. Indicamos el espesor de la portada como de 2.91 mm, que tiene

-YOUN.8684.cp01.001-039.CTPv3 5/12/04 12:26 PM Page 11

3 cifras significativas. Con esto queremos decir que, hasta donde sabemos, los dos primeros dígitos son correctos, pero el tercero es incierto. El último dígito está en la posición de las centésimas, así que la incertidumbre es de 0.01 mm. Dos valores con el *mismo* número de cifras significativas pueden tener *diferente* incertidumbre; una distancia dada como 137 km también tiene tres cifras significativas, pero la incertidumbre es de 1 km.

Si usamos números con incertidumbre para calcular otros números, el resultado también es incierto. Es muy importante entender esto al comparar un número que se obtuvo de mediciones con un valor que se obtuvo de una predicción teórica. Suponga que quiere verificar el valor de π, la razón entre la circunferencia y el diámetro de un círculo. El valor verdadero hasta 10 dígitos es 3.141592654. Para calcularlo, dibuje un círculo grande, mida el diámetro y la circunferencia al milímetro más cercano, obtendrá los valores 135 mm y 424 mm, los cuales dividirá con su calculadora para obtener 3.140740741. ¿Concuerda esto con el valor real?

En primer lugar, los últimos 7 dígitos de la respuesta no significan nada; implican una incertidumbre menor que la de las mediciones. Cuando se multiplican o dividen números, el resultado no puede tener más cifras significativas que el factor con menos cifras significativas. Por ejemplo, $3.1416 \times 2.34 \times 0.58 = 4.3$. Las dos mediciones que usted efectuó tienen 3 cifras significativas, así que el valor medido de π, igual a (424 mm)/(135 mm), sólo puede tener 3 cifras significativas, y debe darse simplemente como 3.14. Dentro del límite de 3 cifras significativas, este valor coincide con el verdadero.

Al sumar o restar números, lo que importa es la posición del punto decimal, no el número de cifras significativas. Por ejemplo, $123.62 + 8.9 = 132.5$. Aunque 123.62 tiene una incertidumbre de 0.01, la de 8.9 es de 0.1, así que la suma debe tener esta misma incertidumbre y escribirse como 132.5, no 132.52.

En los ejemplos y problemas de este libro, por lo regular daremos valores numéricos con 3 cifras significativas, así que sus respuestas no deberán tener más de 3 cifras significativas. (En el mundo real muchos números tienen una exactitud aun menor. Un velocímetro de automóvil, por ejemplo, sólo suele indicar dos cifras significativas.) Podemos hacer cuentas con una calculadora que exhibe 10 dígitos, pero dar una respuesta de 10 dígitos no sólo es innecesario, es erróneo, porque falsea la exactitud del resultado. Siempre redondee su respuesta final conservando sólo el número correcto de cifras significativas o, si hay duda, acaso una más. En el ejemplo 1.1 habría sido erróneo dar la respuesta como 341.11111 m/s. Cabe señalar que, al reducir una respuesta así al número apropiado de cifras significativas, debemos *redondear*, no *truncar*. La calculadora indica que 525 m/311 m es 1.688102894; con 3 cifras significativas, esto es 1.69, no 1.68.

Al calcular con números muy grandes o muy pequeños, es mucho más fácil indicar las cifras significativas usando **notación científica**, también llamada **notación de potencias de 10**. La distancia de la Tierra a la Luna es de cerca de 384,000,000 m, pero esta forma del número no da idea de cuántas cifras significativas tiene. En vez de ello, movemos el punto decimal ocho lugares a la izquierda (que equivale a dividir entre 10^8) y multiplicamos por 10^8. Es decir,

$$384{,}000{,}000 \text{ m} = 3.84 \times 10^8 \text{ m}$$

En esta forma, es obvio que tenemos 3 cifras significativas. El número 4.00×10^{-7} también tiene 3 cifras significativas, aunque dos de ellas sean ceros. En notación científica se acostumbra expresar la cantidad como un número entre 1 y 10 multiplicado por la potencia de 10 apropiada. La tabla 1.1 resume las reglas para las cifras significativas.

-YOUN.8684.cp01.001-039.CTPv3 5/12/04 12:26 PM Page 12

Tabla 1.1 **Uso de cifras significativas**

Operación matemática	Cifras significativas en el resultado
Multiplicación o división	No más que en el número que tiene menos cifras significativas *Ejemplo:* $(0.745 \times 2.2)/3.885 = 0.42$ *Ejemplo:* $(1.32578 \times 10^7) \times (4.11 \times 10^{-3}) = 5.45 \times 10^4$
Suma o resta	Lo determina el número con menor incertidumbre (es decir, el menor número de dígitos a la derecha del punto decimal) *Ejemplo:* $27.153 + 138.2 - 11.74 = 153.6$

Nota: En este libro normalmente daremos valores numéricos con tres cifras significativas.

Cuando aparece un entero o una fracción en una ecuación general, tratamos ese número como si no tuviera incertidumbre. Por ejemplo, en la ecuación $v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x(x - x_0)$, que es la ecuación (2.13) del capítulo 2, el coeficiente 2 es *exactamente* 2; podemos pensar que tiene un número infinito de cifras significativas (2.000000...). Lo mismo ocurre con el exponente 2 en $v_x{}^2$ y $v_{0x}{}^2$.

Por último, cabe señalar que **precisión** no es lo mismo que *exactitud*. Un reloj digital barato que dice que la hora es 10:35:17 A.M. es muy *preciso* (la hora se da con segundos), pero si el reloj está atrasado varios minutos, el valor no será muy *exacto*. Por otro lado, un reloj de caja puede ser muy exacto (da la hora correcta) pero, si no tiene segundero, no será muy preciso. Una medición de alta calidad, como las que definen estándares (Sección 1.3), es precisa *y* exacta.

Ejemplo 1.3 Cifras significativas al multiplicar

La energía en reposo E de un objeto con masa en reposo m está dada por la ecuación de Einstein

$$E = mc^2$$

donde c es la rapidez de la luz en el vacío. Calcule E para un objeto con $m = 9.11 \times 10^{-31}$ kg (la masa del electrón, con tres cifras significativas). La unidad SI para E es el joule (J); $1\ \text{J} = 1\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^2$.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: La incógnita es la energía E. Nos dan la ecuación que debemos usar y el valor de la masa m. En la Sección 1.3 vimos que el valor exacto de c es 299 792 458 m/s = 2.99792458×10^8 m/s.

EJECUTAR: Si sustituimos los valores de m y c en la ecuación de Einstein tenemos

$$\begin{aligned} E &= (9.11 \times 10^{-31}\ \text{kg})(2.99792458 \times 10^8\ \text{m/s})^2 \\ &= (9.11)(2.99792458)^2(10^{-31})(10^8)^2\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^2 \\ &= (81.87659678)(10^{[-31+(2\times 8)]})\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^2 \\ &= 8.187659678 \times 10^{-14}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^2 \end{aligned}$$

Dado que el valor de m se dio con sólo tres cifras significativas, deberemos redondear esto a

$$E = 8.19 \times 10^{-14}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^2 = 8.19 \times 10^{-14}\ \text{J}$$

Casi todas las calculadoras usan notación científica y escriben los exponentes automáticamente, pero conviene saber realizar este tipo de cálculos a mano.

EVALUAR: La energía en reposo contenida en un electrón podría parecer ridículamente pequeña, pero en la escala atómica es tremenda. Comparemos nuestra respuesta con 10^{-19} J, la energía que un átomo gana o pierde durante una reacción química típica; ¡la energía en reposo de un electrón es aproximadamente 1,000,000 veces mayor! (Hablaremos del significado de la energía en reposo en el capítulo 37.)

-YOUN.8684.cp01.001-039.CTPv3 5/12/04 12:26 PM Page 13

Evalúe su comprensión

La densidad de un material es igual a su masa dividida entre su volumen. ¿Qué densidad (en kg/m^3) tiene una roca de masa 1.80 kg y volumen 6.0×10^{-4} m^3? Compruebe que la respuesta tenga el número correcto de cifras significativas.

1.6 | Estimaciones y órdenes de magnitud

Hemos subrayado la importancia de conocer la exactitud de los números que representan cantidades físicas, pero aun una estimación burda de una cantidad puede darnos información útil. A veces sabemos cómo calcular cierta cantidad pero debemos estimar los datos necesarios para el cálculo. O bien, el cálculo podría ser demasiado complicado para efectuarse con exactitud, así que lo aproximamos. En ambos casos el resultado es una estimación, pero puede servirnos incluso si tiene un factor de incertidumbre de 2, 10 o más. Tales cálculos se denominan **estimaciones de orden de magnitud**. El gran físico italoamericano Enrico Fermi (1901-1954) los llamaba “cálculos del reverso de un sobre”.

Los ejercicios 1.18 a 1.29 de este capítulo son del tipo de estimación u “orden de magnitud”. Algunos son risibles, y casi todos requieren estimar los datos de entrada requeridos. No trate de consultar muchos datos; estímelos como mejor pueda. Aun con un error del 1000% los resultados pueden ser útiles e interesantes.

Ejemplo 1.4 Estimación de orden de magnitud

Suponga que está escribiendo una novela en la que el héroe huye a otro país con mil millones de dólares en oro en la maleta. ¿Es posible esto? ¿Cabría tanto oro en una maleta? ¿Sería demasiado pesado?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR, PLANTEAR y EJECUTAR: El oro se vende a unos 400 dólares la onza, aunque el precio podría variar entre 200 y 600 dólares. Una onza equivale a unos 30 g. De hecho, una onza ordinaria (avoirdupois) es 28.35 g; una onza de oro es una onza troy, que pesa 9.45% más, pero no importa. Diez dólares en oro tienen una masa de cerca de 1 g, así que mil millones (10^9) de dólares en oro son cien millones (10^8) de gramos = cien mil (10^5) kg = 100 toneladas. Sea que el número exacto se acerque más a 50 o a 200 toneladas, el héroe no podrá cargar tanto oro en una maleta.

También podemos estimar el *volumen* del oro. Si su densidad fuera igual a la del agua (1 g/cm^3), el volumen sería 10^8 cm^3, o sea, 100 m^3. Pero el oro es un metal pesado; podríamos pensar que su densidad es 10 veces la del agua. De hecho, el oro es 19.3 veces más denso que el agua, pero al estimar 10 obtenemos un volumen de 10 m^3. Imagine 10 pilas cúbicas de lingotes de oro, cada una con 1 m por lado, y pregúntese si cabrían en una maleta.

EVALUAR: Es evidente que hay que reescribir la novela. Pruebe el cálculo ahora con una maleta llena de diamantes de cinco quilates (1 gramo), cada uno de los cuales vale 100,000 dólares. ¿Ahora sí podría transportarse el botín?

Evalúe su comprensión

¿Podría estimar el número de dientes que hay en todas las bocas de su campus universitario (de estudiantes, empleados y profesores)? (*Sugerencia:* ¿Cuántos dientes tiene en su boca? Cuéntelos.)

-YOUN.8684.cp01.001-039.CTPv3 5/12/04 12:26 PM Page 14

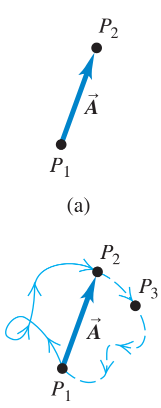
1.7 | Vectores y suma de vectores

Algunas cantidades físicas, como tiempo, temperatura, masa, densidad y carga eléctrica, se pueden describir plenamente con un número y una unidad, pero muchas otras cantidades importantes están asociadas a una *dirección* y no pueden describirse con un solo número. Tales cantidades desempeñan un papel fundamental en muchas áreas centrales de la física, como el movimiento y sus causas y los fenómenos de electricidad y magnetismo. Un ejemplo sencillo es el movimiento de un avión: para describirlo plenamente, debemos indicar no sólo qué tan rápidamente se mueve, sino también hacia dónde. Para ir de Chicago a Nueva York, un avión debe volar al este, no al sur. La rapidez del avión combinada con su dirección constituye una cantidad llamada *velocidad*. Otro ejemplo es la *fuerza*, que en física es un empuje o tirón aplicado a un cuerpo. Para describir plenamente una fuerza hay que indicar no sólo su intensidad, sino también en qué dirección tira o empuja.

Si una cantidad física se describe con un solo número, decimos que es una **cantidad escalar**. En cambio, una **cantidad vectorial** tiene una **magnitud** (el "qué tanto") y una dirección en el espacio. Los cálculos con escalares usan las operaciones aritméticas ordinarias. Por ejemplo, 6 kg + 3 kg = 9 kg, o 4×2 s = 8 s. Combinar vectores requiere un juego de operaciones distintas.

Para entender mejor los vectores y su combinación, comencemos con la cantidad vectorial más simple, el **desplazamiento**, que es un cambio en la posición de un punto. (El punto podría representar una partícula o un cuerpo pequeño). En la figura 1.6a representamos el cambio de posición del punto P_1 al punto P_2 con una línea que va de P_1 a P_2, con una punta de flecha en P_2 para indicar la dirección. El desplazamiento es una cantidad vectorial porque debemos decir no sólo cuánto se mueve la partícula, sino también hacia dónde. Caminar 3 km al norte desde nuestra casa no nos lleva al mismo sitio que caminar 3 km al sureste; ambos desplazamientos tienen la misma magnitud, pero diferente dirección.

Notación manuscrita: $\underline{A}$ o $\vec{A}$



1.6 (a) El vector $\vec{A}$ es el desplazamiento del punto P_1 al punto P_2. (b) Un desplazamiento siempre es un segmento recto dirigido del punto inicial al final, aunque el camino seguido sea curvo. Si un camino termina donde comenzó, el desplazamiento es 0.

Frecuentemente podemos representar una cantidad vectorial como el desplazamiento con una letra, como $\vec{A}$ en la figura 1.6a. En este libro siempre simbolizaremos los vectores con ***letras negritas cursivas con una flecha arriba***, como recordatorio de que los vectores tienen diferentes propiedades que los escalares; la flecha nos recuerda que los vectores tienen dirección. Los símbolos manuscritos de vectores suelen subrayarse o escribirse con una flecha (Fig. 1.6). *Siempre* escriba los símbolos vectoriales de una de estas formas. Si no distingue entre vectores y escalares en su notación, probablemente tampoco lo hará en su mente, y se confundirá.

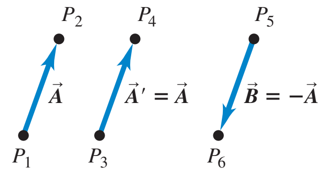
Al dibujar un vector, siempre trazamos una línea con punta de flecha. La longitud de la línea indica la magnitud del vector, y su dirección es la del vector. El desplazamiento siempre es un segmento recto dirigido del punto inicial al final, aunque el camino real seguido por la partícula sea curvo. En la figura 1.6b, la partícula sigue el camino curvo de P_1 a P_2, pero el desplazamiento sigue siendo el vector $\vec{A}$. Observe que el desplazamiento no se relaciona directamente con la *distancia* total recorrida. Si la partícula siguiera a P_3 y volviera a P_1, el desplazamiento total sería *cero*.

Si dos vectores tienen la misma dirección, son **paralelos**; si tienen la misma magnitud *y* dirección, son *iguales*, sea cual sea su ubicación en el espacio. El vector $\vec{A}\,'$ de P_3 a P_4 en la figura 1.7 tiene la misma longitud y dirección que $\vec{A}$ de P_1 a P_2. Ambos desplazamientos son iguales, aunque parten de puntos distintos. Escri-

-YOUN.8684.cp01.001-039.CTPv3 5/12/04 12:26 PM Page 15

bimos esto como $\vec{A} = \vec{A}'$ en la figura 1.7, usando un signo igual en negritas para subrayar que la igualdad de dos cantidades vectoriales no es lo mismo que la igualdad de dos cantidades escalares. Dos vectores sólo son iguales si tienen la misma magnitud *y* la misma dirección.

Sin embargo, el vector $\vec{B}$ de la figura 1.7, no es igual a $\vec{A}$ porque su dirección es *opuesta*. Definimos el **negativo de un vector** como un vector con la misma magnitud que el original pero dirección *opuesta*. El negativo de $\vec{A}$ se denota con $-\vec{A}$, y usamos un signo menos en negritas para destacar la índole vectorial de las cantidades. Si $\vec{A}$ es 87 m al sur, entonces $-\vec{A}$ es 87 m al norte. Así, la relación entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$ en la figura 1.7 puede escribirse $\vec{A} = -\vec{B}$ o $\vec{B} = -\vec{A}$. Si dos vectores tienen direcciones opuestas, sean sus magnitudes iguales o no, decimos que son **antiparalelos**.



1.7 El desplazamiento de P_3 a P_4 es igual a aquél de P_1 a P_2. El desplazamiento $\vec{B}$ de P_5 a P_6 tiene la misma magnitud que $\vec{A}$ y que $\vec{A}'$ pero dirección opuesta; el desplazamiento $\vec{B}$ es el negativo del desplazamiento $\vec{A}$.

Frecuentemente podemos representar la *magnitud* de una cantidad vectorial (su longitud, en el caso de un vector de desplazamiento) con la misma letra que usamos para el vector pero en *cursiva delgada sin* la flecha arriba. Una notación alterna es el símbolo vectorial encerrado en barras verticales:

$$(\text{Magnitud de } \vec{A}) = A = |\vec{A}| \tag{1.2}$$

Por definición, la magnitud de una cantidad vectorial es una cantidad escalar (un número) y *siempre es positiva*. Cabe señalar también que un vector nunca puede ser igual a un escalar porque son cantidades de distinto tipo. La expresión "$\vec{A} = 6$ m" es tan absurda como "2 naranjas = 3 manzanas" o "6 lb = 7 km".

Al dibujar diagramas con vectores, normalmente usamos una escala similar a la de los mapas, en la que la distancia en el diagrama es proporcional a la magnitud del vector. Por ejemplo, un desplazamiento de 5 km podría representarse con un vector de 1 cm en un diagrama, pues usar el tamaño real no sería práctico. Al trabajar con cantidades vectoriales en unidades distintas de las de desplazamiento, como fuerza o velocidad, *debemos* usar una escala. En un diagrama de vectores de fuerza podríamos representar una fuerza de 5 N con un vector de 1 cm. Entonces, un vector de 4 cm representaría una fuerza de 20 N, con la dirección apropiada.

Suma de vectores

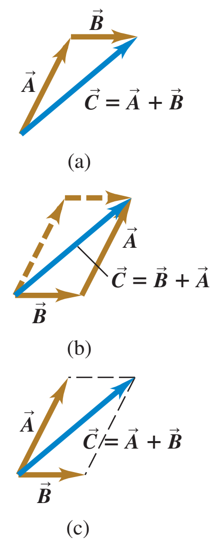
Supongamos que una partícula sufre un desplazamiento $\vec{A}$, seguido de un desplazamiento $\vec{B}$ (Fig. 1.8a). El resultado final es el mismo que si la partícula hubiera partido del mismo punto y sufrido un solo desplazamiento $\vec{C}$, como se muestra. Llamamos a $\vec{C}$ el **vector sumatoria**, o **resultante**, de los desplazamientos $\vec{A}$ y $\vec{B}$. Expresamos esta relación simbólicamente así:

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} \tag{1.3}$$

El signo más en negritas subraya que sumar dos vectores requiere un proceso geométrico y no es lo mismo que sumar dos escalares como $2 + 3 = 5$. Al sumar vectores, por lo regular colocamos la *cola* del *segundo* vector en la *cabeza*, o punta, del *primer* vector (Fig. 1.8a).

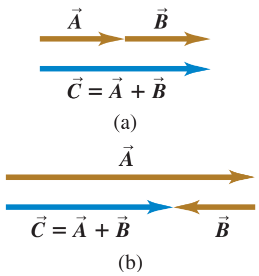
Si efectuamos los desplazamientos $\vec{A}$ y $\vec{B}$ en orden inverso, primero $\vec{B}$ y luego $\vec{A}$, el resultado es el mismo (Fig. 1.8b). Así,

$$\vec{C} = \vec{B} + \vec{A} \quad \text{y} \quad \vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A} \tag{1.4}$$



1.8 El vector $\vec{C}$ es la suma vectorial de $\vec{A}$ y $\vec{B}$. El orden no importa; la suma de vectores es conmutativa.

-YOUN.8684.cp01.001-039.CTPv3 5/12/04 12:26 PM Page 16

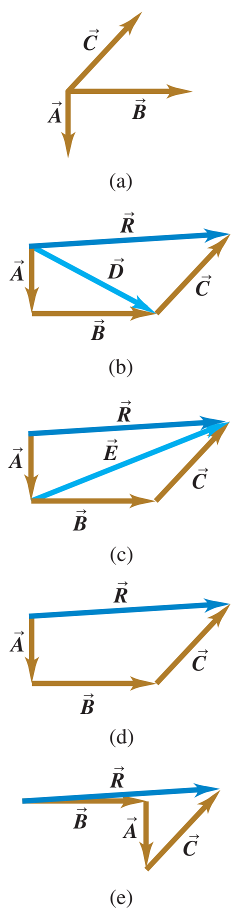


1.9 (a) En el caso especial en que los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son paralelos, y únicamente en ese caso, la magnitud de su suma es igual a la suma de sus magnitudes: C = A + B. (b) Cuando $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son antiparalelos, la magnitud de su suma es igual a la diferencia de sus magnitudes: $C = |A - B|$. Cabe señalar que los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ de la parte (a) no son los mismos que $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ de la parte (b).

Esto indica que el orden de los términos en una suma de vectores no importa. Dicho de otro modo, la suma de vectores obedece la ley conmutativa.

La figura 1.8c muestra otra representación de la suma vectorial. Si dibujamos $\vec{A}$ y $\vec{B}$ con sus colas en el mismo punto, el vector $\vec{C}$ es la diagonal de un paralelogramo construido con $\vec{A}$ y $\vec{B}$ como dos lados adyacentes.

CUIDADO Es un error común suponer que si $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$, la magnitud C deberá ser igual a la magnitud *A* más la magnitud *B*. La figura 1.8 muestra que, en general, tal conclusión es *errónea*; en la figura es obvio que $C < A + B$. La magnitud de la suma vectorial $\vec{A} + \vec{B}$ depende de las magnitudes de $\vec{A}$ y de $\vec{B}$ y también del ángulo que forman $\vec{A}$ y $\vec{B}$ (véase Problema 1.88). Sólo en el caso especial en que $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son *paralelos* es la magnitud de $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ igual a la suma de las magnitudes de $\vec{A}$ y $\vec{B}$ (Fig. 1.9a). En contraste, cuando los vectores son *antiparalelos* (Fig. 1.9b) la magnitud de $\vec{C}$ es la *diferencia* de las magnitudes de $\vec{A}$ y $\vec{B}$. Los estudiantes que no se cuidan de distinguir entre cantidades escalares y vectoriales suelen cometer errores respecto a la magnitud de una suma vectorial. ¡Que no le suceda esto!



1.10 Varias construcciones para obtener la suma vectorial $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$.

Si necesitamos sumar más de dos vectores, podemos sumar primero dos cualesquiera, sumar la resultante al tercero, etc. La figura 1.10a muestra tres vectores, $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$. En la figura 1.10b, se suman primero $\vec{A}$ y $\vec{B}$ dando $\vec{D}$; luego se suman los vectores vectores $\vec{C}$ y $\vec{D}$ para obtener el vector sumatoria $\vec{R}$:

$$\vec{R} = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{D} + \vec{C}$$

Como alternativa, podemos sumar primero $\vec{B}$ y $\vec{C}$ (Fig. 1.10c) para obtener el vector $\vec{E}$, y luego sumar $\vec{A}$ y $\vec{E}$ para obtener $\vec{R}$:

$$\vec{R} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} + \vec{E}$$

No necesitamos dibujar los vectores $\vec{D}$ ni $\vec{E}$; basta con dibujar los vectores dados en sucesión, con la cola de cada uno en la punta del anterior, y completar el polígono con un vector $\vec{R}$ que va de la cola del primero hasta la punta del último (Fig. 1.10d). El orden no importa; la figura 1.10e muestra un orden distinto, y el lector puede probar otros. La suma de vectores obedece la ley asociativa.

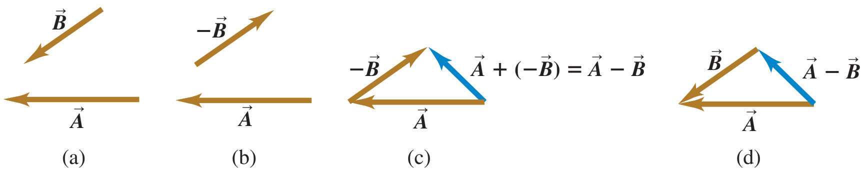
Ya mencionamos que el vector $-\vec{A}$ tiene la misma magnitud que $\vec{A}$ pero dirección opuesta. Esto es la base para definir la resta de vectores. Definimos la diferencia $\vec{A} - \vec{B}$ de los dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ como la suma vectorial de $\vec{A}$ y $-\vec{B}$:

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B}) \tag{1.5}$$

La figura 1.11 muestra un ejemplo de resta de vectores. Para construir la diferencia $\vec{A} - \vec{B}$, la cola de $-\vec{B}$ se coloca en la punta de $\vec{A}$.

Una cantidad vectorial, como el desplazamiento, se puede multiplicar por una escalar (un número ordinario). El desplazamiento $2\vec{A}$ es un desplazamiento (cantidad vectorial) en la misma dirección que $\vec{A}$ pero dos veces más largo; esto equivale a sumar $\vec{A}$ a sí mismo. En general, cuando un vector $\vec{A}$ se multiplica por un escalar c, el resultado $c\vec{A}$ tiene magnitud $|c|A$ (el valor absoluto de c multiplicado por la magnitud de $\vec{A}$). Si c es positivo, $c\vec{A}$ tiene la dirección de $\vec{A}$; si c es negativo, $c\vec{A}$ tiene la dirección opuesta a la de $\vec{A}$. Así, $5\vec{A}$ es paralelo a $\vec{A}$, pero $-5\vec{A}$ es antiparalelo a $\vec{A}$.

-YOUN.8684.cp01.001-039.CTPv3 5/12/04 12:26 PM Page 17



1.11 (a) Vector $\vec{A}$ y vector $\vec{B}$. (b) Vector $\vec{A}$ y vector $-\vec{B}$. (c) La diferencia vectorial $\vec{A} - \vec{B}$ es la suma de $\vec{A}$ y $-\vec{B}$. La cola de $-\vec{B}$ se coloca en la punta de $\vec{A}$. (d) Para verificar: $(\vec{A} - \vec{B}) + \vec{B} = \vec{A}$.

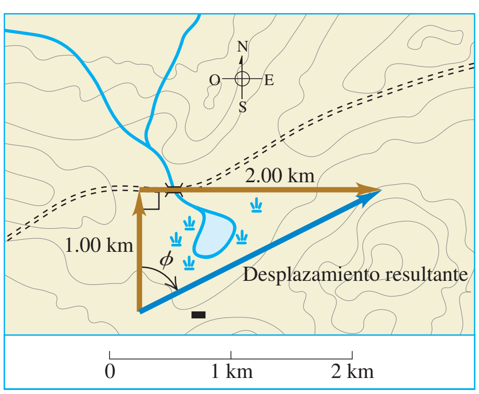
El escalar que multiplica un vector también puede ser una cantidad física con unidades. Por ejemplo, es posible que el lector conozca la relación $\vec{F} = m\vec{a}$; la fuerza neta $\vec{F}$ (un vector) que actúa sobre un cuerpo es igual al producto de la masa del cuerpo m (una cantidad escalar positiva) y su aceleración $\vec{a}$ (un vector). La magnitud de la fuerza neta es igual a la masa (que es positiva e igual a su propio valor absoluto) multiplicada por la magnitud de la aceleración. La unidad de la magnitud de la fuerza es la unidad de masa multiplicada por la unidad de la magnitud de la aceleración. La dirección de $\vec{F}$ es la de $\vec{a}$ porque m es positiva.

Ejemplo 1.5 Suma vectorial

Una esquiadora viaja 1.00 km al norte y luego 2.00 km al este por un campo nevado horizontal. a) ¿A qué distancia y en qué dirección está del punto de partida? b) ¿Qué magnitud y dirección tiene su desplazamiento resultante?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: El problema implica combinar desplazamientos, así que podemos resolverlo con una suma de vectores. Las variables meta de la parte (a) son la distancia total y la dirección de la esquiadora respecto a su punto de partida. Cabe señalar que las variables meta de la parte (b) son *las mismas* que las de (a): la "magnitud de su desplazamiento resultante" no es sino su distancia final respecto al punto de origen, y la "dirección de su desplazamiento resultante" es simplemente la dirección del punto de origen al punto en el que se detuvo.



1.12 Diagrama vectorial, a escala, de un recorrido en esquí a campo traviesa.

PLANTEAR: La figura 1.12 es un diagrama a escala de los desplazamientos de la esquiadora. Describiremos la dirección desde el punto de partida con el ángulo ϕ (la letra griega "fi"). Si medimos con cuidado, veremos que la distancia al punto inicial es de unos 2.2 km y ϕ es aproximadamente 63º, pero podemos *calcular* un resultado mucho más exacto sumando los vectores de desplazamiento de 1.00 km y 2.00 km.

EJECUTAR: a) Los vectores del diagrama forman un triángulo rectángulo; la distancia del punto de partida es igual a la longitud de la hipotenusa. Obtenemos esa longitud usando el teorema de Pitágoras:

$$\sqrt{(1.00\text{ km})^2 + (2.00\text{ km})^2} = 2.24\text{ km}$$

El ángulo ϕ se obtiene por trigonometría simple. Si necesita un repaso, en el apéndice B se resumen las funciones e identidades trigonométricas y otras relaciones matemáticas y geométricas útiles. Por la definición de tangente:

$$\tan\phi = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{2.00\text{ km}}{1.00\text{ km}}$$

$$\phi = 63.4°$$

b) La magnitud del desplazamiento resultante es la distancia calculada en (a), 2.24 km. Podemos describir la dirección como 63.4º al este del norte o $90° - 63.4° = 26.6º$ al norte del este, como prefiera.

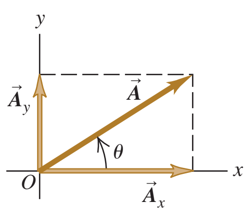
EVALUAR: Conviene practicar verificando los resultados de un problema de suma vectorial efectuando mediciones en un dibujo de la situación. Felizmente, las respuestas que obtuvimos calculando (2.24 km y $\phi = 63.4°$) son muy cercanas a los resultados burdos que obtuvimos midiendo (unos 2.2 km y 63°). Si fueran muy distintos, tendríamos que regresar y buscar el error.

-YOUN.8684.cp01.001-039.CTPv3 5/12/04 12:26 PM Page 18

Evalúe su comprensión

Si la esquiadora hubiera avanzado primero 2.00 km al este y luego 1.00 km al norte, desde su punto de partida, ¿qué magnitud y dirección habría tenido su desplazamiento resultante?

1.8 | Componentes de vectores



1.13 Los vectores $\vec{A}_x$ y $\vec{A}_y$ son los vectores componentes rectangulares de $\vec{A}$ sobre los ejes x y y. En este caso, las componentes A_x y A_y son positivas.

En la sección 1.7 sumamos vectores usando un diagrama a escala y las propiedades de los triángulos rectángulos. La exactitud de las mediciones en diagramas es muy limitada y los cálculos con triángulos rectángulos sólo funcionan con vectores perpendiculares. Necesitamos un método simple pero general para sumar vectores: el método de *componentes*.

Para definir las componentes de un vector partimos de un sistema rectangular de ejes de coordenadas (cartesiano) (Fig. 1.13) y dibujamos el vector en cuestión con su cola en O, el origen. Podemos representar cualquier vector en el plano xy como la suma de un vector paralelo al eje x y uno paralelo al eje y. Rotulamos esos vectores $\vec{A}_x$ y $\vec{A}_y$ en la figura; son los **vectores componentes** del vector $\vec{A}$, y su suma vectorial es igual a $\vec{A}$. En símbolos,

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y \tag{1.6}$$

Por definición, cada vector componente tiene la dirección de un eje de coordenadas, por lo que sólo necesitamos un número para describirlo. Si el vector componente $\vec{A}_x$ apunta hacia la dirección x positiva, definimos el número A_x como la magnitud de $\vec{A}_x$; si $\vec{A}_x$ apunta en la dirección x negativa, A_x es igual al negativo de dicha magnitud, teniendo presente que la magnitud en sí de un vector nunca es negativa. Definimos el número A_y del mismo modo. A_x y A_y son las **componentes** de $\vec{A}$.

CUIDADO Las componentes A_x y A_y de un vector $\vec{A}$ son sólo números, *no* son vectores. Por ello las simbolizamos con letras cursivas delgadas sin flecha arriba, en vez de las letras negritas cursivas con flecha que están reservadas para los vectores.

Podemos calcular las componentes de $\vec{A}$ si conocemos la magnitud A y su dirección. Describimos la dirección de un vector con su ángulo relativo a una dirección de referencia, que en la figura 1.13 es el eje x positivo, y el ángulo entre $\vec{A}$ y el eje x positivo es θ (la letra griega "theta"). Imaginemos que el vector $\vec{A}$ yace originalmente sobre el eje $+x$ y lo giramos hasta su dirección correcta, como indica la flecha sobre el ángulo θ en la figura 1.13. Si la rotación es del eje $+x$ al eje $+y$, como en la figura 1.13, entonces θ es *positivo*; si la rotación es del eje $+x$ al eje $-y$, entonces θ es *negativo*. Por tanto, el eje $+y$ está a 90º, el eje $-x$ está a 180º y el eje $-y$ está a 270º (o -90º). Si medimos de esta manera θ, entonces por la definición de las funciones trigonométricas,

-YOUN.8684.cp01.001-039.CTPv3 5/12/04 12:26 PM Page 19

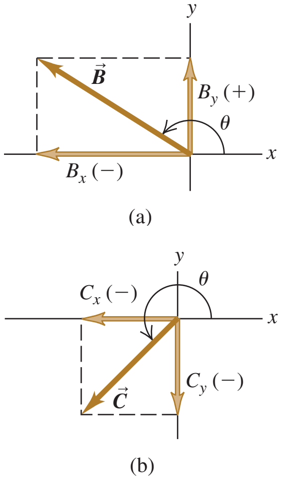
$$\frac{A_x}{A} = \cos\theta \qquad \text{y} \qquad \frac{A_y}{A} = \operatorname{sen}\theta$$

$$A_x = A\cos\theta \qquad \text{y} \qquad A_y = A\operatorname{sen}\theta \tag{1.7}$$

$$(\theta \text{ medido del eje } +x \text{ girando hacia el eje } +y)$$

CUIDADO Las ecuaciones (1.7) son correctas *sólo* si el ángulo θ se mide desde el eje x positivo, como se describe aquí. Si el ángulo del vector se da desde otra dirección de referencia o se usa otro sentido de rotación, las relaciones son distintas. ¡Tenga cuidado! El ejemplo 1.6 ilustra este punto.

En la figura 1.13, A_x es positiva porque su dirección está sobre el eje $+x$, y A_y es positiva porque su dirección está en el eje $+y$. Esto es congruente con las ecuaciones (1.7); θ está en el primer cuadrante (entre 0º y 90º) y tanto el coseno como el seno del ángulo son positivos en este cuadrante. En cambio, en la figura 1.14a, la componente B_x es negativa; su dirección es opuesta a la del eje $+x$. Esto también es congruente con las ecuaciones (1.7); el coseno de un ángulo en el segundo cuadrante es negativo. La componente B_y es positiva (sen θ es positivo en el segundo cuadrante). En la figura 1.14b, tanto C_x como C_y son negativas (cos θ y sen θ son negativos en el tercer cuadrante).



1.14 Las componentes de un vector pueden ser números positivos o negativos.

Ejemplo 1.6 Cálculo de componentes

a) Obtenga las componentes x y y de $\vec{D}$ en la figura 1.15a. La magnitud del vector es $D = 3.00$ m y el ángulo es $\alpha = 45º$.
b) Obtenga las componentes x y y de $\vec{E}$ en la figura 1.15b. La magnitud E es 4.50 m y $\beta = 37.0º$.

SOLUCIÓN

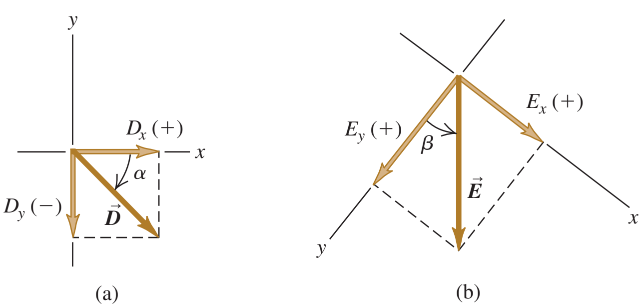
IDENTIFICAR y PLANTEAR: El problema implica determinar componentes, por lo que aparentemente sólo necesitamos las ecuaciones (1.7). Sin embargo, debemos tener cuidado porque los ángulos de la figura 1.15 *no* están medidos del eje $+x$ al eje $+y$.

EJECUTAR: a) El ángulo entre $\vec{D}$ y el eje x positivo es α (la letra griega "alfa"), pero este ángulo se mide hacia el eje y *negativo*. Por tanto, en las ecuaciones (1.7) debemos usar el ángulo $\theta = -\alpha = -45º$. Obtenemos

$$D_x = D\cos\theta = (3.00\text{ m})(\cos(-45°)) = +2.1\text{ m}$$
$$D_y = D\operatorname{sen}\theta = (3.00\text{ m})(\operatorname{sen}(-45°)) = -2.1\text{ m}$$

El vector tiene una componente x positiva y una componente y negativa, como se muestra. Si por descuido hubiéramos usado $\theta = +45º$ en las ecuaciones (1.7), habríamos obtenido D_y con el signo equivocado.
b) El eje x no está horizontal en la figura 1.15b, y el y no está vertical. En general, los ejes x y y pueden tener *cualquier* orientación en tanto sean perpendiculares entre sí. (Luego usaremos ejes como éstos para estudiar el deslizamiento de un objeto en una rampa; un eje quedará sobre la rampa, y el otro será perpendicular a ella.)

Aquí el ángulo β (la letra griega "beta") es el ángulo entre $\vec{E}$ y el eje $+y$, *no* el eje $+x$, así que *no podemos* usar este ángulo en las ecuaciones (1.7). Observe que $\vec{E}$ define la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos son las componentes x y y de $\vec{E}$, E_x y E_y. El seno de β es el cateto opuesto (E_x) dividido entre la hipotenu-



1.15 Cálculo de las componentes x y y de vectores.

sa (la magnitud E), y el coseno de β es el cateto adyacente (E_y) entre la hipotenusa (E). Ambas componentes son positivas, así que

$$E_x = E \text{ sen } \beta = (4.50 \text{ m})(\text{sen } 37.0°) = +2.71 \text{ m}$$
$$E_y = E \cos \beta = (4.50 \text{ m})(\cos 37.0°) = +3.59 \text{ m}$$

Si hubiéramos usado las ecuaciones (1.7) directamente escribiendo $E_x = E \cos 37.0°$ y $E_y = E \text{ sen } 37.0°$, ¡las respuestas se habrían invertido!

Si insiste en usar las ecuaciones (1.7), primero deberá encontrar el ángulo entre $\vec{E}$ y el eje $+x$, medido hacia el eje $+y$; es decir, $\theta = 90.0° - \theta = 90.0° - 37.0° = 53.0°$. Entonces, $E_x = E \cos \theta$ y $E_y = E \text{ sen } \theta$. Ahora sustituya los valores de E y θ en las ecuaciones (1.7) para demostrar que los resultados para E_x y E_y son los mismos que obtuvimos.

EVALUAR: Observe que las respuestas a (b) tienen 3 cifras significativas, pero las de (a) tienen sólo 2. ¿Sabe por qué?

Empleo de componentes para sumar vectores

Podemos describir un vector plenamente dando su magnitud y dirección o bien sus componentes x y y. Las ecuaciones (1.7) indican cómo obtener las componentes si conocemos la magnitud y la dirección. También podemos invertir el proceso y obtener la magnitud y la dirección a partir de las componentes. Aplicando el teorema de Pitágoras a la figura 1.13, vemos que la magnitud de un vector $\vec{A}$ es

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \tag{1.8}$$

donde siempre tomamos la raíz positiva. La ecuación (1.8) es válida para cualesquier ejes x y y, en tanto sean perpendiculares. La expresión para la dirección vectorial proviene de la definición de la tangente de un ángulo. Si medimos θ desde el eje $+x$, y un ángulo positivo se mide hacia el eje $+y$ (como en la Fig. 1.13), entonces

$$\tan \theta = \frac{A_y}{A_x} \quad \text{y} \quad \theta = \arctan \frac{A_y}{A_x} \tag{1.9}$$

Siempre usaremos la notación arctan para la función tangente inversa. También suele usarse $\tan^{-1}$, y una calculadora podría tener un botón INV para usarse con el botón TAN. Microsoft Excel usa ATAN.

CUIDADO El uso de las ecuaciones (1.9) para obtener θ tiene una pequeña complicación. Supongamos $A_x = 2$ m y $A_y = -2$ m; entonces $\tan \theta = -1$. Sin embargo, hay dos ángulos con tangente -1, 135° y 315° (o $-45°$). En general, dos ángulos que difieren en 180° tienen la misma tangente. Para decidir cuál es correcto, debemos examinar las componentes. Dado que A_x es positiva y A_y es negativa, el ángulo debe estar en el cuarto cuadrante; así que $\theta = 315°$ (o $-45°$) es el valor correcto. Casi todas las calculadoras dan $\arctan(-1) = -45°$. En este caso es lo correcto, pero si $A_x = -2$ m y $A_y = 2$ m, entonces el ángulo correcto es 135°. Asimismo, si A_x y A_y son negativas, la tangente es positiva, por lo que el ángulo está en el tercer cuadrante. *Siempre* debe hacerse un dibujo para verificar cuál posibilidad es la correcta.

Veamos cómo usar componentes para calcular la resultante de dos o más vectores. La figura 1.16 muestra dos vectores, $\vec{A}$ y $\vec{B}$, y su suma $\vec{R}$, junto con las componentes x y y de los tres vectores. Es evidente que la componente R_x de la resultante es la suma ($A_x + B_x$) de las componentes x de los vectores sumados. Lo mismo sucede con las componentes y. En símbolos,

$$R_x = A_x + B_x, \qquad R_y = A_y + B_y \qquad (\text{componentes de } \vec{R} = \vec{A} + \vec{B}) \tag{1.10}$$

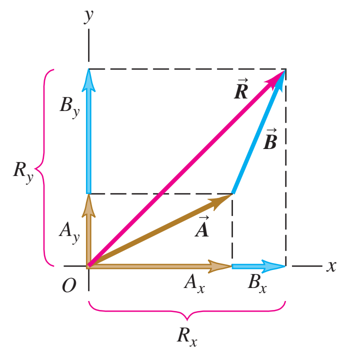
-YOUN.8684.cp01.001-039.CTPv3 5/12/04 12:26 PM Page 21

La figura 1.16 muestra este resultado para el caso en que las componentes A_x, A_y, B_x y B_y son positivas. Dibuje diagramas adicionales para verificar que las ecuaciones (1.10) son válidas *sin importar* el signo de las componentes de $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

Si conocemos las componentes de dos vectores cualesquiera, $\vec{A}$ y $\vec{B}$, tal vez usando las ecuaciones (1.7), podemos calcular las componentes de la resultante $\vec{R}$. Entonces, si necesitamos la magnitud y la dirección de $\vec{R}$, podremos obtenerlas de las ecuaciones (1.8) y (1.9), cambiando las A por R.

Es fácil extender este procedimiento a cualquier cantidad de vectores. Sea $\vec{R}$ el vector sumatoria de $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \vec{D}, \vec{E}, \ldots$. entonces, las componentes de $\vec{R}$ son

$$R_x = A_x + B_x + C_x + D_x + E_x + \ldots$$
$$R_y = A_y + B_y + C_y + D_y + E_y + \ldots \qquad (1.11)$$



1.16 El vector $\vec{R}$ es la suma vectorial (resultante) de $\vec{A}$ y $\vec{B}$. Su componente x, R_x, es igual a la suma de las componentes x de $\vec{A}$ y $\vec{B}$. Las componentes y exhiben la misma relación.

Sólo hemos hablado de vectores que están en el plano xy, pero el método de componentes funciona igual para vectores con cualquier dirección en el espacio. Introducimos un eje z perpendicular al plano xy; en general, un vector $\vec{A}$ tiene componentes A_x, A_y y A_z en las tres direcciones de coordenadas. La magnitud A está dada por

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \qquad (1.12)$$

Siempre tomamos la raíz positiva. También, las ecuaciones (1.11) para las componentes del vector sumatoria $\vec{R}$ tienen un miembro adicional:

$$R_z = A_z + B_z + C_z + D_z + E_z + \ldots$$

Por último, aunque nuestro análisis de la suma de vectores se centró en combinar vectores de *desplazamiento*, el método se puede aplicar igualmente a todas las demás cantidades vectoriales. Al estudiar el concepto de fuerza en el capítulo 4, veremos que las fuerzas son vectores que obedecen las mismas reglas de suma vectorial que usamos con el desplazamiento. Otras cantidades vectoriales aparecerán en capítulos posteriores.

Estrategia para resolver problemas

Suma de vectores

IDENTIFICAR *los conceptos relevantes y* **PLANTEAR** *el problema:* Decida cuál es la incógnita. Podría ser la magnitud de la suma vectorial, la dirección o ambas cosas. Dibuje los vectores por sumar y los ejes de coordenadas a emplear. Coloque la cola del primer vector en el origen de las coordenadas; coloque la cola del segundo vector en la punta del primero, etc. Trace el vector sumatoria $\vec{R}$ desde la cola del primer vector hasta la punta del último. Examinando su dibujo, haga una estimación burda de la magnitud y dirección de $\vec{R}$; usará esas estimaciones después para verificar sus cálculos.

EJECUTAR *la solución como sigue:*

1. Obtenga las componentes x y y de cada vector y anote los resultados en una tabla. Si un vector se describe con su magnitud A y su ángulo θ, medido del eje $+x$ al eje $+y$, las componentes son

$$A_x = A\cos\theta \qquad A_y = A \operatorname{sen}\theta$$

Algunas componentes podrían ser positivas y otras negativas, dependiendo de la orientación del vector (es decir, el cuadrante de θ). Puede usar esta tabla de signos para verificar:

Cuadrante	I	II	III	IV
A_x	+	−	−	+
A_y	+	+	−	−

Si los ángulos de los vectores se dan de otra forma, quizá con otra referencia direccional, conviértalos en ángulos medidos desde el eje $+x$ como se describió. Cuidado con los signos.

2. Sume las componentes x algebraicamente, incluyendo signos, para obtener R_x, la componente x de la resultante. Haga lo mismo con las componentes y para obtener R_y.

-YOUN.8684.cp01.001-039.CTPv3 5/12/04 12:26 PM Page 22

3. Entonces, la magnitud R y la dirección θ de la resultante estarán dadas por

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

$$\theta = \arctan\frac{R_y}{R_x}$$

EVALUAR *la respuesta:* Verifique la magnitud y dirección obtenidas para el vector sumatoria comparándolas con las estimaciones basadas en su dibujo. Recuerde que la magnitud R *siempre* es positiva y que θ se mide desde el eje x positivo. El valor de θ obtenido con una calculadora puede ser el correcto, o tener un error de 180º. La decisión se toma examinando el dibujo.

Si sus cálculos son muy diferentes de la estimación hecha a partir del dibujo, verifique si su calculadora está en modo de "radianes" o de "grados". Si está en modo de radianes, introducir ángulos en grados dará respuestas absurdas. Tenga cuidado con este problema si usa Microsoft Excel, donde todas las funciones trigonométricas usan unidades de radianes, no de grados. Para convertir grados a radianes o viceversa, recuerde que 360 grados equivale a 2π radianes.

Ejemplo 1.7 Suma de vectores con componentes

Los tres finalistas de un concurso se colocan en el centro de un campo plano grande. Cada uno tiene un metro, una brújula, una calculadora, una pala y (en diferente orden para cada concursante), estos desplazamientos:

72.4 m, 32.0º al este del norte;
57.3 m, 36.0º al sur del oeste;
17.8 m al sur.

Los desplazamientos conducen al punto donde están enterradas las llaves de un Porsche nuevo. Dos concursantes comienzan a medir de inmediato, pero el ganador primero *calcula* adónde debe ir. ¿Qué calculó?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: La situación se muestra en la figura 1.17. Escogimos el eje $+x$ como este y el eje $+y$ como norte, que es lo usual en los mapas. Sea $\vec{A}$ el primer desplazamiento, $\vec{B}$ el segundo y $\vec{C}$ el tercero. Podemos estimar en el diagrama que la resultante $\vec{R}$ está a unos 10 m, 40º al oeste del norte.

EJECUTAR: Los ángulos de los vectores, medidos del eje $+x$ al $+y$, son (90.0º − 32.0º) = 58.0º, (180.0º + 36.0º) = 216.0º y 270º. Debemos obtener las componentes. Dada nuestra elección de ejes, podemos usar las ecuaciones (1.7), que nos dan las siguientes componentes de $\vec{A}$:

$$A_x = A\cos\theta_A = (72.4\text{ m})(\cos 58.0°) = 38.37\text{ m}$$
$$A_y = A\,\text{sen}\,\theta_A = (72.4\text{ m})(\text{sen } 58.0°) = 61.40\text{ m}$$

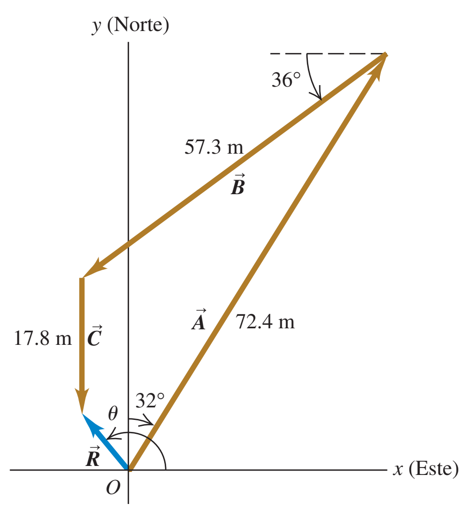
Observe que conservamos una cifra significativa extra en las componentes. Esperaremos hasta el final para redondear el resultado. La siguiente tabla muestra las componentes de los desplazamientos, la suma de las componentes y los otros cálculos. Siempre acomode sus cálculos sistemáticamente.

Distancia	Ángulo	componente *x*	componente *y*
$A = 72.4$ m	58.0°	38.37 m	61.40 m
$B = 57.3$ m	216.0°	−46.36 m	−33.68 m
$C = 17.8$ m	270.0°	0.00 m	−17.80 m
		$R_x = -7.99$ m	$R_y = 9.92$ m

$$R = \sqrt{(-7.99\text{ m})^2 + (9.92\text{ m})^2} = 12.7\text{ m}$$

$$\theta = \arctan\frac{9.92\text{ m}}{-7.99\text{ m}} = 129° = 39° \text{ al oeste del norte}$$

Los perdedores tratan de medir tres ángulos y tres distancias para un total de 147.5 m, un metro a la vez. El ganador midió sólo un ángulo y una distancia mucho más corta.



1.17 Tres desplazamientos sucesivos $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ y el desplazamiento resultante (vector sumatoria) $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$.

-YOUN.8684.cp01.001-039.CTPv3 5/12/04 12:26 PM Page 23

EVALUAR: Los valores que calculamos para R y θ no son muy diferentes de nuestras estimaciones de 10 m y 40° al oeste del norte; ¡muy bien! Observe que $\theta = -51°$ (51° al sur del este) también satisface la ecuación de θ, pero como el ganador hizo un dibujo (Fig. 1.17), sabe que $\theta = 129°$ es la única solución correcta para el ángulo.

Ejemplo 1.8 Vector en 3 dimensiones

Un avión despega y viaja 10.4 km al oeste, 8.7 km al norte y 2.1 km hacia arriba. ¿A qué distancia está de su punto de partida?

SOLUCIÓN

Sea el eje $+x$ este, el $+y$ norte y el $+z$ hacia arriba. Entonces, $A_x = -10.4$ km, $A_y = 8.7$ km y $A_z = 2.1$ km; la ecuación (1.12) da

$$A = \sqrt{(-10.4\text{ km})^2 + (8.7\text{ km})^2 + (2.1\text{ km})^2} = 13.7\text{ km}$$

Evalúe su comprensión

¿A qué distancia está el lector de su punto de salida si primero viajó 4.00 km al oeste y luego 4.00 km al sur? Determine la dirección de su posición desde el origen a su destino.

1.9 | Vectores unitarios

Un **vector unitario** es un vector con magnitud 1, sin unidades. Su único fin es *direccionar*, o sea, describir una dirección en el espacio. Los vectores unitarios son una notación cómoda para muchas expresiones que incluyen componentes de vectores. Siempre incluiremos un acento circunflejo $(\hat{\ })$ sobre el símbolo de un vector unitario para distinguirlo de los vectores ordinarios cuya magnitud podría o no ser 1.

En un sistema de coordenadas x-y podemos definir un vector unitario $\hat{\imath}$ que apunte en la dirección del eje $+x$ y un vector unitario $\hat{\jmath}$ que apunte en la dirección $+y$. Así, podemos expresar la relación entre vectores componentes y componentes, descrita al principio de la sección 1.8, como sigue:

$$\vec{A}_x = A_x\hat{\imath}$$
$$\vec{A}_y = A_y\hat{\jmath} \tag{1.13}$$

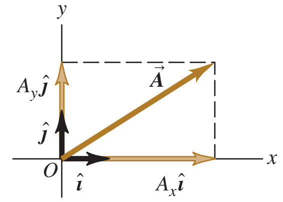
Asimismo, podemos escribir un vector $\vec{A}$ en términos de sus componentes como

$$\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} \tag{1.14}$$

Las ecuaciones (1.13) y (1.14) son vectoriales; cada término, como $A_x\hat{\imath}$, es un vector (Fig. 1.18). Los signos igual y más en negritas indican igualdad y suma de vectores.

Cuando representamos dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ en términos de sus componentes, podemos expresar la resultante $\vec{R}$ usando vectores unitarios como sigue:

$$\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath}$$
$$\vec{B} = B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath}$$



1.18 Si usamos vectores unitarios, podemos expresar un vector $\vec{A}$ en términos de sus componentes A_x y A_y como $\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath}$.

-YOUN.8684.cp01.001-039.CTPv3 5/12/04 12:26 PM Page 24

$$
\begin{aligned}
\vec{R} &= \vec{A} + \vec{B} \\
&= (A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath}) + (B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath}) \\
&= (A_x + B_x)\hat{\imath} + (A_y + B_y)\hat{\jmath} \\
&= R_x\hat{\imath} + R_y\hat{\jmath} \qquad (1.15)
\end{aligned}
$$

La ecuación (1.15) plantea el contenido de las ecuaciones (1.10) en forma de una sola ecuación vectorial en lugar de dos ecuaciones de componentes.

Si todos los vectores no están en el plano xy, necesitaremos una tercera componente. Introducimos un tercer vector unitario $\hat{k}$ que apunta en la dirección del eje $+z$. Las formas generalizadas de las ecuaciones (1.14) y (1.15) son

$$
\begin{aligned}
\vec{A} &= A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k} \\
\vec{B} &= B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath} + B_z\hat{k} \qquad (1.16)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\vec{R} &= (A_x + B_x)\hat{\imath} + (A_y + B_y)\hat{\jmath} + (A_z + B_z)\hat{k} \\
&= R_x\hat{\imath} + R_y\hat{\jmath} + R_z\hat{k} \qquad (1.17)
\end{aligned}
$$

Ejemplo 1.9

Uso de vectores unitarios

Dados los dos desplazamientos

$$\vec{D} = (6\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - \hat{k})\text{m} \quad \text{y} \quad \vec{E} = (4\hat{\imath} - 5\hat{\jmath} + 8\hat{k})\text{m}$$

Obtenga la magnitud del desplazamiento $2\vec{D} - \vec{E}$.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR, PLANTEAR y EJECUTAR: Si $\vec{F} = 2\vec{D} - \vec{E}$, tenemos

$$
\begin{aligned}
\vec{F} &= 2(6\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - \hat{k})\text{m} - (4\hat{\imath} - 5\hat{\jmath} + 8\hat{k})\text{m} \\
&= [(12 - 4)\hat{\imath} + (6 + 5)\hat{\jmath} + (-2 - 8)\hat{k}]\text{m} \\
&= (8\hat{\imath} + 11\hat{\jmath} - 10\hat{k})\text{m}
\end{aligned}
$$

Las unidades de los vectores $\vec{D}$, $\vec{E}$ y $\vec{F}$ son metros, así que las componentes de estos vectores también están en metros. De la ecuación (1.12),

$$
\begin{aligned}
F &= \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \\
&= \sqrt{(8\text{ m})^2 + (11\text{ m})^2 + (-10\text{ m})^2} = 17\text{ m}
\end{aligned}
$$

EVALUAR: Trabajar con vectores unitarios hace que la suma y resta de vectores no sean más complicadas que la suma y resta de números ordinarios. Aun así, no olvide verificar que no haya cometido errores de aritmética simple.

Evalúe su comprensión

Exprese los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ del ejemplo 1.7 (sección 1.8) en términos de vectores unitarios.

1.10 | Productos de vectores

Hemos visto cómo la suma de vectores es consecuencia natural del problema de combinar desplazamientos, y sumaremos muchas otras cantidades vectoriales posteriormente. También podemos expresar muchas relaciones físicas de forma concisa usando *productos* de vectores. Los vectores no son números ordinarios, así que no podemos aplicar la multiplicación ordinaria. Definiremos dos tipos de productos de vectores. El primero, llamado producto escalar, produce un resultado escalar. El segundo, el producto vectorial, produce otro vector.

-YOUN.8684.cp01.001-039.CTPv3 5/12/04 12:26 PM Page 25

Producto escalar

El **producto escalar** de dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ se denota con $\vec{A}\cdot\vec{B}$. Por esta notación el producto escalar también se denomina **producto punto**.

Para definir el producto escalar $\vec{A}\cdot\vec{B}$ dibujamos $\vec{A}$ y $\vec{B}$, con su cola en el mismo punto (Fig. 1.19a). El ángulo entre sus direcciones es ϕ, como se muestra; ϕ siempre está entre 0º y 180º. (Como siempre, usamos letras griegas para los ángulos.) La figura 1.19b muestra la proyección del vector $\vec{B}$ sobre la dirección de $\vec{A}$; esta proyección es la componente de $\vec{B}$ paralela a $\vec{A}$ y es igual a $B\cos\phi$. (Podemos obtener componentes en cualquier dirección conveniente, no sólo los ejes x y y.) Definimos $\vec{A}\cdot\vec{B}$ como la magnitud de $\vec{A}$ multiplicada por la componente de $\vec{B}$ paralela a $\vec{A}$. Expresado como ecuación,

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\phi = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\phi \tag{1.18}$$

(definición del producto escalar (punto))

donde ϕ está entre 0º y 180º.

También podemos definir $\vec{A}\cdot\vec{B}$ como la magnitud de $\vec{B}$ multiplicada por la componente de $\vec{A}$ paralela a $\vec{B}$, como en la figura 1.19c. Así, $\vec{A}\cdot\vec{B} = B(A\cos\phi) = AB\cos\phi$, igual que en la ecuación (1.18).

El producto escalar es una cantidad escalar, no un vector, y puede ser positivo, negativo o cero. Si ϕ está entre 0º y 90º, el producto escalar es positivo, y negativo si ϕ está entre 90º y 180º. Dibuje un diagrama como el de la figura 1.19, pero con ϕ entre 90º y 180º, para constatar que la componente de $\vec{B}$ paralela a $\vec{A}$ es negativa en este caso, lo mismo que la componente de $\vec{A}$ paralela a $\vec{B}$. Cuando $\phi = 90°$, $\vec{A}\cdot\vec{B} = 0$. *El producto escalar de dos vectores perpendiculares siempre es cero.*

Para dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ cualesquiera, $AB\cos\phi = BA\cos\phi$. Esto implica que $\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}$. El producto escalar obedece la ley conmutativa de la multiplicación; el orden de los dos vectores no importa.

Usaremos el producto escalar en el capítulo 6 para describir el trabajo realizado por una fuerza. Si una fuerza constante $\vec{F}$ se aplica a un cuerpo que sufre un desplazamiento $\vec{s}$, el trabajo W (una cantidad escalar) realizado por la fuerza es

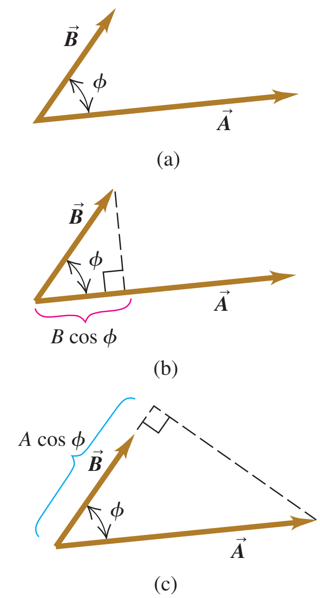
$$W = \vec{F}\cdot\vec{s}$$

El trabajo es positivo si el ángulo entre $\vec{F}$ y $\vec{s}$ está entre 0º y 90º, negativo si el ángulo está entre 90º y 180º, y 0 si $\vec{F}$ y $\vec{s}$ son perpendiculares. (Éste es otro ejemplo de un término con significado especial en física; en el lenguaje cotidiano, "trabajo" no es algo que pueda ser positivo o negativo.) Más adelante usaremos el producto escalar para varios fines, desde calcular potencial eléctrico hasta determinar el efecto de campos magnéticos variables sobre circuitos eléctricos.

Podemos calcular el producto $\vec{A}\cdot\vec{B}$ directamente si conocemos las componentes x, y y z de $\vec{A}$ y $\vec{B}$. Para ver cómo se hace, obtengamos primero los productos escalares de los vectores unitarios. Esto es fácil, pues $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ y $\hat{k}$ son perpendiculares entre sí. Por la ecuación (1.18),

$$\hat{\imath}\cdot\hat{\imath} = \hat{\jmath}\cdot\hat{\jmath} = \hat{k}\cdot\hat{k} = (1)(1)\cos 0 = 1$$

$$\hat{\imath}\cdot\hat{\jmath} = \hat{\imath}\cdot\hat{k} = \hat{\jmath}\cdot\hat{k} = (1)(1)\cos 90° = 0 \tag{1.19}$$



1.19 (a) Dos vectores dibujados desde un punto de partida común para definir su producto escalar $\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\phi$. (b) $B\cos\phi$ es la componente de $\vec{B}$ en la dirección de $\vec{A}$ y $\vec{A}\cdot\vec{B}$ es el producto de la magnitud de $\vec{A}$ y esa componente. (c) $\vec{A}\cdot\vec{B}$ también es el producto de la magnitud de $\vec{B}$ y la componente de $\vec{A}$ en la dirección de $\vec{B}$.

Ahora expresamos $\vec{A}$ y $\vec{B}$ en términos de sus componentes, expandimos el producto y usamos estos productos de vectores unitarios:

$$\begin{aligned}\vec{A}\cdot\vec{B} &= (A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k})\cdot(B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath} + B_z\hat{k})\\ &= A_x\hat{\imath}\cdot B_x\hat{\imath} + A_x\hat{\imath}\cdot B_y\hat{\jmath} + A_x\hat{\imath}\cdot B_z\hat{k}\\ &\quad + A_y\hat{\jmath}\cdot B_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath}\cdot B_y\hat{\jmath} + A_y\hat{\jmath}\cdot B_z\hat{k}\\ &\quad + A_z\hat{k}\cdot B_x\hat{\imath} + A_z\hat{k}\cdot B_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}\cdot B_z\hat{k}\\ &= A_xB_x\hat{\imath}\cdot\hat{\imath} + A_xB_y\hat{\imath}\cdot\hat{\jmath} + A_xB_z\hat{\imath}\cdot\hat{k}\\ &\quad + A_yB_x\hat{\jmath}\cdot\hat{\imath} + A_yB_y\hat{\jmath}\cdot\hat{\jmath} + A_yB_z\hat{\jmath}\cdot\hat{k}\\ &\quad + A_zB_x\hat{k}\cdot\hat{\imath} + A_zB_y\hat{k}\cdot\hat{\jmath} + A_zB_z\hat{k}\cdot\hat{k}\end{aligned} \tag{1.20}$$

Por las ecuaciones (1.19), es evidente que seis de estos nueve términos son 0, y los otros 3 dan simplemente

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \tag{1.21}$$

(producto escalar (punto) en términos de componentes)

Por tanto, el producto escalar de dos vectores es la suma de los productos de sus respectivas componentes.

El producto escalar permite calcular directamente el ángulo ϕ entre dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ cuyas componentes conocemos. En este caso, obtenemos el producto escalar de $\vec{A}$ y $\vec{B}$ con la ecuación (1.21). Por la ecuación (1.18), dicho producto también es igual a $AB\cos\phi$. Las magnitudes A y B pueden obtenerse de los vectores componentes con la ecuación (1.12), así que podemos determinar $\cos\phi$ y de ahí ϕ (véase el ejemplo 1.11).

Ejemplo 1.10 Cálculo de un producto escalar

Obtenga el producto escalar de los dos vectores de la figura 1.20. Las magnitudes de los vectores son $A = 4.00$ y $B = 5.00$.

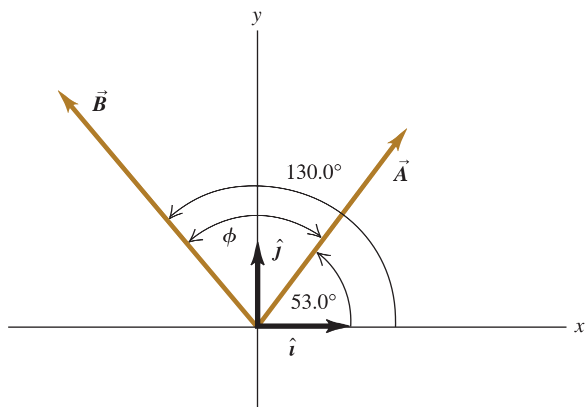
SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Hay dos formas de calcular el producto escalar. La primera usa las magnitudes de los vectores y el ángulo entre ellos (ecuación 1.18); la segunda usa las componentes de los vectores (ecuación 1.21).

EJECUTAR: Usando el primer enfoque, el ángulo entre los vectores es $\phi = 130.0° - 53.0° = 77.0°$, así que

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\phi = (4.00)(5.00)\cos 77.0° = 4.50$$

Esto es positivo porque el ángulo entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$ está entre 0º y 90º.



1.20 Dos vectores en dos dimensiones.

Para el segundo enfoque necesitamos las componentes de los dos vectores. Como los ángulos de $\vec{A}$ y $\vec{B}$ se dan con respecto al eje $+x$, medidos hacia el eje $+y$, podemos usar las ecuaciones (1.7):

$$A_x = (4.00)\cos 53.0° = 2.407$$
$$A_y = (4.00)\,\text{sen}\,53.0° = 3.195$$
$$A_z = 0$$
$$B_x = (5.00)\cos 130.0° = -3.214$$
$$B_y = (5.00)\,\text{sen}\,130.0° = 3.830$$
$$B_z = 0$$

Las componentes z son cero porque ambos vectores están en el plano xy. Como en el ejemplo 1.7, dejamos una cifra significativa de más en las componentes; redondearemos al final. Por la ecuación (1.21), el producto escalar es

$$\begin{aligned}\vec{A}\cdot\vec{B} &= A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z\\ &= (2.407)(-3.214) + (3.195)(3.830)\\ &\quad + (0)(0) = 4.50\end{aligned}$$

EVALUAR: Obtenemos el mismo resultado con ambos métodos, como debe ser.

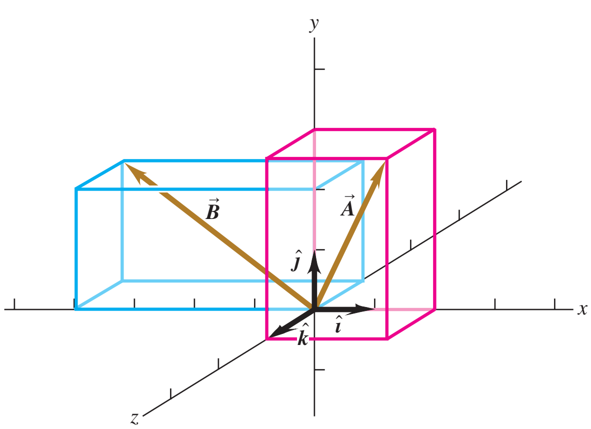
Ejemplo 1.11 Cálculo de ángulos con el producto escalar

Determine el ángulo entre los dos vectores

$$\vec{A} = 2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + \hat{k} \quad \text{y} \quad \vec{B} = -4\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - \hat{k}$$

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: El producto escalar de dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ está relacionado con el ángulo ϕ entre ellos y con las magnitudes A y B. También está relacionado con las componentes de los dos vectores. Si nos dan las componentes (como en este ejemplo), primero determinamos el producto escalar $\vec{A}\cdot\vec{B}$ y los valores de A y B, y luego determinamos la incógnita ϕ.



1.21 Dos vectores en tres dimensiones.

PLANTEAR y EJECUTAR: Los vectores se muestran en la figura 1.21. El producto escalar de dos vectores está dado por la ecuación (1.18) o la (1.21). Igualándolas y reacomodando, obtenemos

$$\cos\phi = \frac{A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}{AB}$$

Podemos usar esta fórmula para calcular el ángulo entre cualesquier dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$. En este ejemplo las componentes de $\vec{A}$ son $A_x = 2$, $A_y = 3$ y $A_z = 1$, y las de $\vec{B}$, $B_x = -4$, $B_y = 2$ y $B_z = -1$. Entonces,

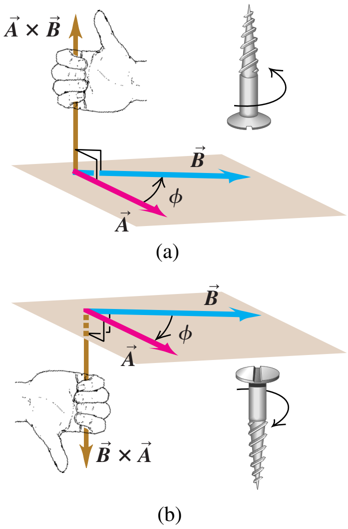
$$\begin{aligned}\vec{A}\cdot\vec{B} &= A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z\\ &= (2)(-4) + (3)(2) + (1)(-1) = -3\\ A &= \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} = \sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{14}\\ B &= \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2} = \sqrt{(-4^2) + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{21}\\ \cos\phi &= \frac{A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}{AB} = \frac{-3}{\sqrt{14}\sqrt{21}} = -0.175\\ \phi &= 100°\end{aligned}$$

EVALUAR: Para verificar el resultado, observe que el producto escalar $\vec{A}\cdot\vec{B}$ es negativo. Esto implica que ϕ está entre 90º y 180º, lo que concuerda con nuestra respuesta.

Producto vectorial

El **producto vectorial** de dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, también llamado **producto cruz**, se denota con $\vec{A} \times \vec{B}$. Usaremos este producto en el capítulo 10 para describir el par

-YOUN.8684.cp01.001-039.CTPv3 5/12/04 12:26 PM Page 28



1.22 (a) Vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ en un plano; el producto vectorial $\vec{A}\times\vec{B}$ es perpendicular a este plano en una dirección determinada por la regla de la mano derecha. (b) $\vec{B}\times\vec{A} = -\vec{A}\times\vec{B}$; el producto vectorial es anticonmutativo.

(o torque) y la cantidad de movimiento angular. También lo usaremos mucho al estudiar los campos magnéticos, pues nos ayudará a describir las relaciones entre las direcciones de varias cantidades vectoriales.

Para definir el producto vectorial de $\vec{A}\times\vec{B}$ otra vez dibujamos los vectores con su cola en el mismo punto (Fig. 1.22a). Así, los dos vectores están en un plano. Definimos el producto vectorial como un vector perpendicular a este plano (o sea, perpendicular a $\vec{A}$ y $\vec{B}$) con una magnitud igual a AB sen ϕ. Es decir, si $\vec{C} = \vec{A}\times\vec{B}$, entonces

$$C = AB \text{ sen } \phi \qquad (1.22)$$

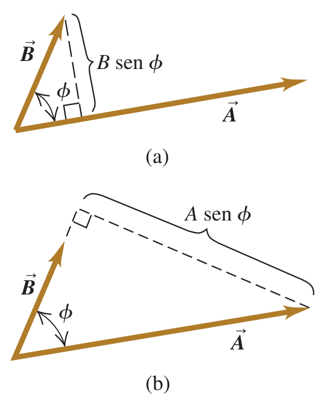
(magnitud del producto vectorial (cruz) de $\vec{A}$ y $\vec{B}$)

Medimos el ángulo ϕ de $\vec{A}$ hacia $\vec{B}$ tomando el más pequeño de los dos ángulos posibles, por lo que ϕ está entre 0º y 180º. Por tanto, C en la ecuación (1.22) siempre es positivo, como toda magnitud de vector. Observe también que, si $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son paralelos o antiparalelos, $\phi = 0º$ o 180º, y $C = 0$. *El producto vectorial de dos vectores paralelos o antiparalelos siempre es 0*. En particular, *el producto vectorial de un vector consigo mismo es 0.* Para contrastar el producto escalar y la magnitud del producto vectorial, imagine que variamos el ángulo entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$ manteniendo constantes sus magnitudes. Si $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son paralelos, el producto escalar es máximo y la magnitud del producto cruz es 0. Si $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares, el producto escalar es 0 y la magnitud del producto cruz es máxima.

Siempre hay *dos* direcciones perpendiculares a un plano dado, una a cada lado del plano. Escogemos la dirección de $\vec{A}\times\vec{B}$ como sigue. Imagine que gira el vector $\vec{A}$ sobre la línea perpendicular hasta alinearlo con $\vec{B}$, escogiendo el ángulo más pequeño entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$. Enrosque los dedos de su mano derecha sobre la perpendicular, con las puntas apuntando en la dirección de rotación; el pulgar apuntará en la dirección de $\vec{A}\times\vec{B}$. Esta **regla de la mano derecha** se ilustra en la figura 1.22a. La dirección del producto cruz también es aquella en la que avanza un tornillo con rosca derecha si se gira de $\vec{A}$ hacia $\vec{B}$.

Asimismo, determinamos la dirección de $\vec{B}\times\vec{A}$ girando $\vec{B}$ hacia $\vec{A}$ en la figura 1.22b. El resultado es un vector *opuesto* a $\vec{A}\times\vec{B}$. ¡El producto vectorial no es conmutativo! De hecho para cualesquier dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$,

$$\vec{A}\times\vec{B} = -\vec{B}\times\vec{A} \qquad (1.23)$$



1.23 (a) B sen ϕ es la componente de $\vec{B}$ perpendicular a la dirección de $\vec{A}$, y la magnitud de $\vec{A}\times\vec{B}$ es el producto de la magnitud de $\vec{A}$ y esta componente. (b) La magnitud de $\vec{A}\times\vec{B}$ también es el producto de la magnitud de $\vec{B}$ y la componente de $\vec{A}$ perpendicular a $\vec{B}$.

Como hicimos con el producto escalar, podemos interpretar geométricamente la magnitud del producto vectorial. En la figura 1.23a, B sen ϕ es la componente de $\vec{B}$ que es *perpendicular* a la dirección de $\vec{A}$. Por la ecuación (1.22), la magnitud de $\vec{A}\times\vec{B}$ es igual a la magnitud de $\vec{A}$ multiplicada por la componente de $\vec{B}$ perpendicular a $\vec{A}$. La figura 1.23b muestra que la magnitud de $\vec{A}\times\vec{B}$ también es igual a la magnitud de $\vec{B}$ por la componente de $\vec{A}$ perpendicular a $\vec{B}$. Esta figura ilustra el caso en que ϕ está entre 0º y 90º; dibuje un diagrama similar para ϕ entre 90º y 180º para comprobar que es válida la misma interpretación geométrica de la magnitud de $\vec{A}\times\vec{B}$.

Si conocemos las componentes de $\vec{A}$ y $\vec{B}$, podremos calcular las componentes del producto vectorial usando un procedimiento similar al del producto escalar.

-YOUN.8684.cp01.001-039.CTPv3 5/12/04 12:26 PM Page 29

Primero deducimos la tabla de multiplicación de los vectores unitarios $\hat{\boldsymbol{\imath}}$, $\hat{\boldsymbol{\jmath}}$ y $\hat{\boldsymbol{k}}$. El producto cruz de un vector consigo mismo es 0, así que

$$\hat{\boldsymbol{\imath}} \times \hat{\boldsymbol{\imath}} = \hat{\boldsymbol{\jmath}} \times \hat{\boldsymbol{\jmath}} = \hat{\boldsymbol{k}} \times \hat{\boldsymbol{k}} = \mathbf{0}$$

El cero en negritas nos recuerda que cada producto es un *vector* cero; es decir, uno con todas sus componentes iguales a 0 y dirección indefinida. Usando las ecuaciones (1.22) y (1.23) y la regla de la mano derecha, tenemos

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\imath}} \times \hat{\boldsymbol{\jmath}} &= -\hat{\boldsymbol{\jmath}} \times \hat{\boldsymbol{\imath}} = \hat{\boldsymbol{k}} \\ \hat{\boldsymbol{\jmath}} \times \hat{\boldsymbol{k}} &= -\hat{\boldsymbol{k}} \times \hat{\boldsymbol{\jmath}} = \hat{\boldsymbol{\imath}} \\ \hat{\boldsymbol{k}} \times \hat{\boldsymbol{\imath}} &= -\hat{\boldsymbol{\imath}} \times \hat{\boldsymbol{k}} = \hat{\boldsymbol{\jmath}} \end{aligned} \tag{1.24}$$

Ahora expresamos $\vec{\boldsymbol{A}}$ y $\vec{\boldsymbol{B}}$ en términos de sus componentes y los vectores unitarios, y expandimos la expresión del producto cruz:

$$\begin{aligned} \vec{\boldsymbol{A}} \times \vec{\boldsymbol{B}} &= (A_x\hat{\boldsymbol{\imath}} + A_y\hat{\boldsymbol{\jmath}} + A_z\hat{\boldsymbol{k}}) \times (B_x\hat{\boldsymbol{\imath}} + B_y\hat{\boldsymbol{\jmath}} + B_z\hat{\boldsymbol{k}}) \\ &= A_x\hat{\boldsymbol{\imath}} \times B_x\hat{\boldsymbol{\imath}} + A_x\hat{\boldsymbol{\imath}} \times B_y\hat{\boldsymbol{\jmath}} + A_x\hat{\boldsymbol{\imath}} \times B_z\hat{\boldsymbol{k}} \\ &\quad + A_y\hat{\boldsymbol{\jmath}} \times B_x\hat{\boldsymbol{\imath}} + A_y\hat{\boldsymbol{\jmath}} \times B_y\hat{\boldsymbol{\jmath}} + A_y\hat{\boldsymbol{\jmath}} \times B_z\hat{\boldsymbol{k}} \\ &\quad + A_z\hat{\boldsymbol{k}} \times B_x\hat{\boldsymbol{\imath}} + A_z\hat{\boldsymbol{k}} \times B_y\hat{\boldsymbol{\jmath}} + A_z\hat{\boldsymbol{k}} \times B_z\hat{\boldsymbol{k}} \end{aligned} \tag{1.25}$$

También podemos escribir los términos individuales como $A_x\hat{\boldsymbol{\imath}} \times B_y\hat{\boldsymbol{\jmath}} = (A_xB_y)\hat{\boldsymbol{\imath}} \times \hat{\boldsymbol{\jmath}}$, etc. Evaluamos éstos usando la tabla de multiplicar de los vectores unitarios y agrupamos términos para obtener

$$\vec{\boldsymbol{A}} \times \vec{\boldsymbol{B}} = (A_yB_z - A_zB_y)\hat{\boldsymbol{\imath}} + (A_zB_x - A_xB_z)\hat{\boldsymbol{\jmath}} + (A_xB_y - A_yB_x)\hat{\boldsymbol{k}} \tag{1.26}$$

Por tanto, las componentes de $\vec{\boldsymbol{C}} = \vec{\boldsymbol{A}} \times \vec{\boldsymbol{B}}$ están dadas por

$$C_x = A_yB_z - A_zB_y \qquad C_y = A_zB_x - A_xB_z \qquad C_z = A_xB_y - A_yB_x$$

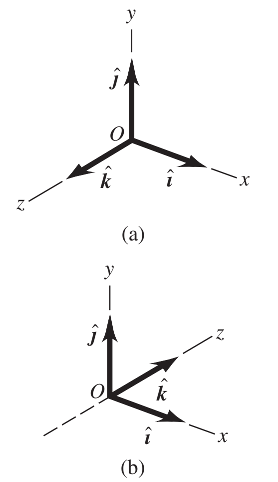
(componentes de $\vec{\boldsymbol{C}} = \vec{\boldsymbol{A}} \times \vec{\boldsymbol{B}}$) (1.27)

El producto cruz también puede expresarse en forma de determinante:

$$\vec{\boldsymbol{A}} \times \vec{\boldsymbol{B}} = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{\imath}} & \hat{\boldsymbol{\jmath}} & \hat{\boldsymbol{k}} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

Si no ha estudiado determinantes, olvídese de esta forma.

Con el sistema de ejes de la figura 1.24a, si invertimos la dirección del eje z, obtenemos el sistema de la figura 1.24b. Aquí, como podrá comprobar el lector, la definición del producto cruz da $\hat{\boldsymbol{\imath}} \times \hat{\boldsymbol{\jmath}} = -\hat{\boldsymbol{k}}$ en vez de $\hat{\boldsymbol{\imath}} \times \hat{\boldsymbol{\jmath}} = \hat{\boldsymbol{k}}$. De hecho, todos los productos vectoriales de $\hat{\boldsymbol{\imath}}$, $\hat{\boldsymbol{\jmath}}$, y $\hat{\boldsymbol{k}}$ tendrían signos opuestos a los de las ecuaciones. (1.24). Vemos que hay dos tipos de sistemas de coordenadas que difieren en los signos de los productos cruz de los vectores unitarios. En un **sistema derecho,** $\hat{\boldsymbol{\imath}} \times \hat{\boldsymbol{\jmath}} = \hat{\boldsymbol{k}}$, como en la figura 1.24a. Lo usual es utilizar *sólo* sistemas derechos, cosa que haremos en todo este libro.



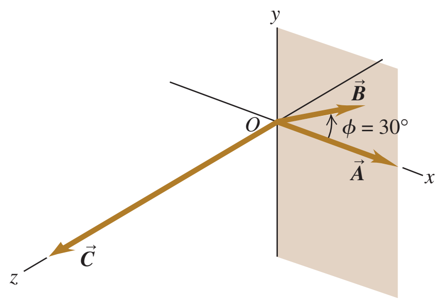
1.24 (a) Sistema de coordenadas derecho, en el que $\hat{\boldsymbol{\imath}} \times \hat{\boldsymbol{\jmath}} = \hat{\boldsymbol{k}}$, $\hat{\boldsymbol{\jmath}} \times \hat{\boldsymbol{k}} = \hat{\boldsymbol{\imath}}$ y $\hat{\boldsymbol{k}} \times \hat{\boldsymbol{\imath}} = \hat{\boldsymbol{\jmath}}$. (b) Un sistema de coordenadas izquierdo, en el que $\hat{\boldsymbol{\imath}} \times \hat{\boldsymbol{\jmath}} = -\hat{\boldsymbol{k}}$, etc. Sólo usaremos sistemas derechos.

Ejemplo 1.12 Cálculo de un producto vectorial

El vector $\vec{A}$ tiene una magnitud de 6 unidades y está sobre el eje $+x$. $\vec{B}$ tiene una magnitud de 4 unidades y está en el plano xy formando un ángulo de 30º con el eje $+x$ (Fig. 1.25). Calcule el producto $\vec{A} \times \vec{B}$.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Podemos obtener el producto cruz de dos maneras. La primera es usar la ecuación (1.22) para determinar la magnitud de $\vec{A} \times \vec{B}$ y luego usar la regla de la mano derecha para encontrar la dirección. La segunda forma es usar las componentes de $\vec{A}$ y $\vec{B}$ para obtener las componentes del producto cruz $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ usando las ecuaciones (1.27).



1.25 Vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ y su producto vectorial $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$. El vector $\vec{B}$ está en el plano xy.

EJECUTAR: Con el primer enfoque, por la ecuación (1.22), la magnitud del producto cruz es

$$AB \operatorname{sen} \phi = (6)(4)(\operatorname{sen} 30°) = 12$$

Por la regla de la mano derecha, $\vec{A} \times \vec{B}$ tiene la dirección del eje $+z$; por tanto, $\vec{A} \times \vec{B} = 12\hat{k}$.

Para usar el segundo enfoque, primero escribimos las componentes de $\vec{A}$ y $\vec{B}$:

$$A_x = 6 \qquad A_y = 0 \qquad A_z = 0$$
$$B_x = 4 \cos 30° = 2\sqrt{3} \qquad B_y = 4 \operatorname{sen} 30° = 2 \qquad B_z = 0$$

Definiendo $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$, tenemos, por las ecuaciones (1.27), que

$$\begin{aligned} C_x &= (0)(0) - (0)(2) = 0 \\ C_y &= (0)(2\sqrt{3}) - (6)(0) = 0 \\ C_z &= (6)(2) - (0)(2\sqrt{3}) = 12 \end{aligned}$$

El producto vectorial $\vec{C}$ tiene sólo una componente z sobre el eje $+z$. La magnitud concuerda con el resultado obtenido antes, como debe ser.

EVALUAR: En este ejemplo, el primer enfoque fue más directo porque conocíamos las magnitudes de los vectores y el ángulo entre ellos, y además ambos vectores estaban en uno de los planos del sistema de coordenadas. Sin embargo, muchas veces habrá que obtener el producto cruz de dos vectores con una orientación menos cómoda o de los que sólo se dan las componentes. En tales casos, el segundo enfoque es más directo.

Evalúe su comprensión

Para los dos vectores $\vec{A} = 3\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$ y $\vec{B} = 4\hat{\imath} + 5\hat{k}$, obtenga el producto escalar $\vec{A} \cdot \vec{B}$ y el producto vectorial $\vec{A} \times \vec{B}$.

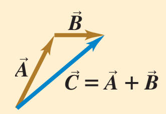
-YOUN.8684.cp01.001-039.CTPv3 5/12/04 12:27 PM Page 31

RESUMEN

Las cantidades físicas fundamentales de la mecánica son masa, longitud y tiempo. Las unidades SI básicas correspondientes son el kilogramo, el metro y el segundo. Otras unidades para estas cantidades, relacionadas por potencias de 10, se identifican agregando prefijos. Las unidades derivadas para otras cantidades físicas son productos o cocientes de las básicas. Las ecuaciones deben ser dimensionalmente congruentes. Sólo pueden sumarse dos términos si tienen las mismas unidades. (Véanse ejemplos 1.1 y 1.2.)

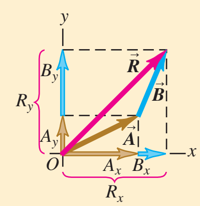
La exactitud de una medición puede indicarse con el número de cifras significativas o dando una incertidumbre. El resultado de un cálculo no suele tener más cifras significativas que los datos. Cuando sólo disponemos de estimaciones burdas como datos, podemos estimar el orden de magnitud del resultado. (Véanse ejemplos 1.3 y 1.4.)

Las cantidades escalares son números y se combinan con la aritmética usual. Las cantidades vectoriales tienen dirección y magnitud y se combinan según las reglas de la suma vectorial. Gráficamente, dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ se suman colocando la cola de $\vec{B}$ en la punta de $\vec{A}$. El vector sumatoria $\vec{A} + \vec{B}$ se extiende desde la cola de $\vec{A}$ hasta la punta de $\vec{B}$. (Véase ejemplo 1.5.)



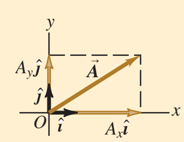
La suma vectorial puede efectuarse con componentes de vectores. La componente x del vector sumatoria $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$ es la suma de las componentes x de $\vec{A}$ y $\vec{B}$, las componentes y y z se obtienen de forma análoga. (Véanse ejemplos 1.6 y 1.7.)

$$R_x = A_x + B_x$$
$$R_y = A_y + B_y$$
$$R_z = A_z + B_z \qquad (1.10)$$



Los vectores unitarios describen direcciones en el espacio y tienen magnitud de 1, sin unidades. Los vectores unitarios $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ y $\hat{k}$, alineados con los ejes x, y y z de un sistema de coordenadas rectangular, tienen especial utilidad. (Véase ejemplo 1.9.)

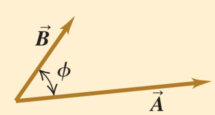
$$\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k} \qquad (1.16)$$



El producto escalar $C = \vec{A} \cdot \vec{B}$ de dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ es una cantidad escalar. Se puede expresar de dos maneras: en términos de las magnitudes de $\vec{A}$ y $\vec{B}$ y el ángulo ϕ que forman, o en términos de las componentes de $\vec{A}$ y $\vec{B}$. El producto escalar es conmutativo; para cualesquier dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$. El producto escalar de dos vectores perpendiculares es cero. (Véanse ejemplos 1.10 y 1.11.)

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos\phi = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\phi \qquad (1.18)$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \qquad (1.21)$$



-YOUN.8684.cp01.001-039.CTPv3 5/12/04 12:27 PM Page 32

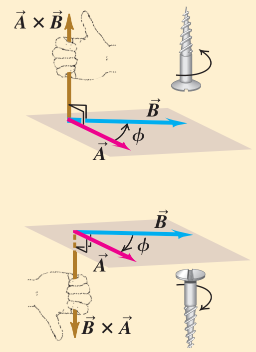
El producto vectorial $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ de dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ es otro vector $\vec{C}$, cuya magnitud depende de las magnitudes de $\vec{A}$ y $\vec{B}$ y del ángulo ϕ entre los dos vectores. La dirección de $\vec{A} \times \vec{B}$ es perpendicular al plano de los dos vectores multiplicados, según la regla de la mano derecha. Las componentes de $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ se pueden expresar en términos de las componentes de $\vec{A}$ y $\vec{B}$. El producto vectorial no es conmutativo; para cualesquier dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$. El producto vectorial de dos vectores paralelos o antiparalelos es cero. (Véase ejemplo 1.12.)

$$C = AB \operatorname{sen} \phi \qquad (1.22)$$

$$C_x = A_y B_z - A_z B_y$$

$$C_y = A_z B_x - A_x B_z$$

$$C_z = A_x B_y - A_y B_x \qquad (1.27)$$



Términos clave

cantidad escalar, 14
cantidad física, 5
cantidad vectorial, 14
cifras significativas, 10
componentes, 18
definición operativa, 5
desplazamiento, 14
dimensionalmente consistente, 8
error fraccionario, 10
estimaciones de orden de magnitud, 13
exactitud, 10
incertidumbre (error), 10
incógnita, 4
intervalo de validez, 3
kilogramo, 6
magnitud de un vector, 14
metro, 6
modelo, 4
negativo de un vector, 15
notación científica (de potencias de 10), 11
partícula, 4
porcentaje de error, 10
precisión, 12
prefijo, 6
producto escalar (punto), 25
producto vectorial (cruz), 27
regla de la mano derecha, 28
segundo, 6
sistema derecho, 29
Sistema Internacional (si), 5
Sumatoria de vectores (resultante), 15
unidad, 5
vector unitario, 23
vectores antiparalelos, 15
vectores componentes, 18
vectores paralelos, 14

Notas del lector

-YOUN.8684.cp01.001-039.CTPv3 5/12/04 12:27 PM Page 33

Respuesta a la pregunta inicial del capítulo

La figura 1.3e muestra que un glóbulo rojo humano tiene un diámetro aproximado de 8 μm. Doce o trece de esas células en fila abarcarían una distancia de 100 $\mu\text{m} = 10^{-4}$ m.

Respuestas a las preguntas de Evalúe su comprensión

Sección 1.5 Densidad = (1.80 kg)/(6.0 $\times$ 10^{-4} m^3) = 3.0 $\times$ 10^3 kg/m^3. Al multiplicar o dividir, el número con menos cifras significativas controla el número de cifras significativas del resultado.
Sección 1.6 La respuesta depende de cuántos estudiantes están inscritos en el campus.
Sección 1.7 Al sumar dos vectores, el orden de los vectores no importa. Por tanto, el desplazamiento resultante sería el mismo que en el ejemplo 1.5 (magnitud 2.24 km, dirección 63.4° al este del norte).
Sección 1.8 Está a 5.66 km del punto de partida en una dirección 45.0° al sur del oeste.
Sección 1.9
$\vec{A} = (38.37\hat{\imath} + 61.40\hat{\jmath})\text{m}$, $\vec{B} = (-46.36\hat{\imath} - 33.68\hat{\jmath})\text{m}$,
$\vec{C} = (-17.80\hat{\jmath})\text{m}$.
Sección 1.10 $\vec{A}\cdot\vec{B} = (3)(4) + (2)(0) + (0)(5) = 12$

$$\begin{aligned}\vec{A}\times\vec{B} &= [(2)(5) - (0)(0)]\hat{\imath} + [(0)(4) - (3)(5)]\hat{\jmath}\\ &\quad + [(3)(0) - (2)(4)]\hat{k}\\ &= 10\hat{\imath} - 15\hat{\jmath} - 8\hat{k}\end{aligned}$$

Preguntas para análisis

P1.1 ¿Cuántos experimentos correctos necesitamos para refutar una teoría? ¿Y para demostrarla? Explique.
P1.2 Una guía dice que la pendiente de una vereda en una montaña es de 120 metros por kilómetro. ¿Cómo podemos expresar esto con un número sin unidades?
P1.3 Suponga que se le pide calcular la tangente de 5.00 metros. ¿Es posible? ¿Por qué sí o por qué no?
P1.4 Un contratista dice que al construir la cubierta de un puente vació 250 yardas de concreto. ¿A qué cree que se refería?
P1.5 ¿Qué estatura tiene usted en centímetros? ¿Qué peso tiene en newtons?
P1.6 El National Institute of Science and Technology (NIST) de EE.UU. mantiene varias copias exactas del kilogramo estándar internacional. Pese a una cuidadosa limpieza, estos estándares nacionales aumentan de peso a razón de 1 μg/año, en promedio, en comparación con el estándar internacional (se comparan cada 10 años aproximadamente). ¿Es importante este cambio aparente? Explique.
P1.7 ¿Qué fenómenos físicos (además de un péndulo o un reloj de cesio) podrían servir para definir un estándar de tiempo?
P1.8 Describa cómo podría medir el espesor de una hoja de papel con una regla ordinaria.
P1.9 La cantidad π = 3.14159... no tiene dimensiones, pues es un cociente de dos longitudes. Describa otras dos o tres cantidades geométricas o físicas adimensionales.
P1.10 ¿Cuáles son las unidades de volumen? Suponga que le dicen que un cilindro de radio r y altura h tiene un volumen dado por $\pi r^3 h$. Explique por qué no puede ser.
P1.11 Tres arqueros disparan 4 flechas a un blanco. Las 4 flechas de Juan quedan: 10 cm arriba, 10 cm abajo, 10 cm a la derecha y 10 cm a la izquierda del centro. Las 4 flechas de Luis quedan a menos de 1 cm de un punto que está a 20 cm del centro. Las 4 flechas de Ana quedan a menos de 1 cm del centro del blanco. El juez dice que uno de los arqueros es preciso pero no exacto, otro es exacto pero no preciso, y el tercero es exacto y preciso. ¿Cuál descripción corresponde a cada arquero? Explique su razonamiento.
P1.12 Una pista circular de carreras tiene 500 m de radio. ¿Cuál es el desplazamiento de una ciclista que sigue la pista del extremo norte al extremo sur? ¿Y cuando da una vuelta completa? Explique su razonamiento.
P1.13 ¿Puede encontrar dos vectores con diferente longitud que sumados den cero? ¿Qué restricciones de longitud son necesarias para que tres vectores tengan resultante cero? Explique su razonamiento.
P1.14 A veces hablamos de la "dirección del tiempo", del pasado al futuro. ¿Implica eso que el tiempo es un vector? Explique su razonamiento.
P1.15 Los controladores de tráfico aéreo dan instrucciones a los pilotos respecto hacia dónde volar. Tales instrucciones se denominan "vectores". Si éstas son las únicas instrucciones dadas, ¿se está usando correctamente el término "vector"? ¿Por qué sí o por qué no?
P1.16 ¿Puede encontrar un vector de magnitud cero cuyas componentes sean distintas de cero? Explique. ¿La magnitud de un vector puede ser menor que la magnitud de cualquiera de sus componentes? Explique.
P1.17 (a) ¿Tiene sentido decir que un vector es *negativo*? ¿Por qué? (b) ¿Tiene sentido decir que un vector es el negativo de otro? ¿Por qué? ¿Esta respuesta contradice lo que dijo en la parte (a)?
P1.18 Si $\vec{C}$ es la suma vectorial de $\vec{A}$ y $\vec{B}$, $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$, ¿qué deberá ser cierto si $C = A + B$? ¿Qué deberá ser cierto si $C = 0$?
P1.19 Si $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son vectores distintos de cero, ¿es posible que tanto $\vec{A}\cdot\vec{B}$ y $\vec{A}\times\vec{B}$ sean cero? Explique.
P1.20 ¿Qué resulta de $\vec{A}\cdot\vec{A}$, el producto escalar de un vector consigo mismo? ¿Y $\vec{A}\times\vec{A}$, el producto vectorial de un vector consigo mismo?
P1.21 Sea $\vec{A}$ cualquier vector distinto de cero. ¿Por qué $\vec{A}/A$ es un vector unitario y qué dirección tiene? Si θ es el ángulo entre $\vec{A}$ y el eje $+x$, explique por qué $(\vec{A}/A)\cdot\hat{\imath}$ se llama el *coseno director* de dicho eje.
P1.22 Indique cuáles de las siguientes son operaciones matemáticas correctas: a) $\vec{A}\cdot(\vec{B} - \vec{C})$; b) $(\vec{A} - \vec{B})\times\vec{C}$; c) $\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})$; d) $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})$; e) $\vec{A}\times(\vec{B}\cdot\vec{C})$? En cada caso, justifique sus respuestas.
P1.23 Considere los dos productos vectoriales sucesivos $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})$ y $(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}$. Dé un ejemplo que ilustre la regla general de que estos dos productos no tienen la misma magnitud ni dirección. ¿Puede escoger los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ de modo que

esos dos productos vectoriales *sí* sean iguales? Si puede, dé un ejemplo.

Ejercicios

Sección 1.3 Estándares y unidades

Sección 1.4 Consistencia y conversiones de unidades

1.1 Partiendo de la definición 1 pulg = 2.54 cm, averigue cuántos kilómetros hay en 1.00 milla.

1.2 Según la etiqueta de un frasco de aderezo para ensalada, el volumen del contenido es 0.473 litros (L). Use sólo las conversiones 1 L = 1000 cm^3 y 1 pulg = 2.54 cm para expresar dicho volumen en pulgadas cúbicas.

1.3 ¿Cuántos nanosegundos tarda la luz en viajar 1.00 km en el vacío?

1.4 La densidad del plomo es 11.3 g/cm^3. ¿Cuánto es esto en kilogramos por metro cúbico?

1.5 El motor más potente que había para el automóvil clásico Chevrolet Corvette Sting Ray modelo 1963 desarrollaba 360 caballos de fuerza y tenía un desplazamiento de 327 pulgadas cúbicas. Exprese este desplazamiento en litros (L) usando sólo las conversiones 1 L = 1000 cm^3 y 1 pulg = 2.54 cm.

1.6 Le dijeron a Pito Pérez que debía fijarse metas, así que decidió beber 1 m^3 de su bebida favorita durante el año que inicia. ¿Cuántas botellas de 16 onzas líquidas deberá beber cada día? (Use el apéndice E. La onza líquida es una unidad de volumen; 128 onzas líquidas equivalen a un galón.)

1.7 El Concorde es el avión comercial más rápido, con una velocidad de crucero de 1450 mi/h (unas dos veces la velocidad del sonido, o Mach 2). a) Exprese la velocidad de crucero del Concorde en km/h. b) Exprésela en m/s.

1.8 Conduciendo en un país extranjero, ve un letrero que indica el límite de velocidad como 180 000 furlongs por quincena. ¿Cuánto es esto en mi/h? (Un furlong o estadio es $\frac{1}{8}$ de milla, y una quincena son 14 días. Originalmente el estadio se refería a la longitud de un surco arado.)

1.9 El consumo de gasolina de un coche pequeño se anuncia como 15.0 km/L (1 L = 1 litro). ¿Cuánto es esto en millas por galón? Use los factores de conversión del apéndice E.

1.10 Las conversiones que siguen son comunes en física, además de muy útiles. a) Use 1 mi = 5280 ft y 1 h = 3600 s para convertir 60 mph a unidades de ft/s. b) La aceleración de un objeto en caída libre es de 32 ft/s^2. Use 1 ft = 30.48 cm para expresar esta aceleración en unidades de m/s^2. c) La densidad del agua es de 1.0 g/cm^3. Convierta esta densidad a kg/m^3.

1.11 **Neptunio.** En otoño de 2002, un grupo de científicos del Los Alamos National Laboratory determinó que la masa crítica del neptunio 237 es de unos 60 kg. La masa crítica de un material fisionable es la cantidad mínima que debe juntarse para iniciar una reacción en cadena. Este elemento tiene una densidad de 19.5 g/cm^3. ¿Qué radio tendría una esfera de este material que tiene la masa crítica?

Sección 1.5 Incertidumbre y cifras significativas

1.12 Un valor aproximado, útil y fácil de recordar del número de segundos que hay en un año es $\pi \times 10^7$. Determine el porcentaje de error en este valor aproximado. (Un año tiene 365.24 días.)

1.13 La figura 1.5 muestra el resultado de un error inaceptable en el punto de parada de un tren. a) Si un tren viaja 890 km de Berlín a París y luego rebasa el fin de la vía 10 m, ¿cuál es el porcentaje de error en la distancia total recorrida? b) ¿Sería correcto escribir la distancia total cubierta por el tren como 890,010 m? Explique.

1.14 Con una regla de madera, usted determina que un lado de un trozo rectangular de lámina mide 12 mm, y usa un micrómetro para medir el ancho del trozo, obteniendo 5.98 mm. Conteste las siguientes preguntas con las cifras significativas correctas. a) ¿Qué área tiene el rectángulo? b) ¿Qué razón ancho/largo tiene el rectángulo? c) ¿Qué perímetro tiene el rectángulo? d) ¿Qué diferencia hay entre la longitud y la anchura?

1.15 Estime el porcentaje de error al medir a) una distancia de unos 75 cm con un metro; b) una masa de unos 12 g con una balanza analítica; c) un lapso de unos 6 min con un cronómetro.

1.16 Un trozo rectangular de aluminio mide 5.10 ± 0.01 cm de longitud y 1.90 ± 0.01 cm de anchura. a) Calcule su área y la incertidumbre del área. b) Verifique que la incertidumbre fraccionaria del área sea igual a la suma de las incertidumbres fraccionarias de la longitud y la anchura. (Éste es un resultado general; vea el problema de desafío 1.94.)

1.17 Al comer una bolsa de galletas con chispas de chocolate, usted observa que cada una es un disco circular con diámetro de 8.50 ± 0.02 cm y espesor de 0.050 ± 0.005 cm. a) Calcule el volumen medio de una galleta y la incertidumbre del volumen. b) Obtenga la razón diámetro/espesor y la incertidumbre de dicha razón.

Sección 1.6 Estimaciones y órdenes de magnitud

1.18 ¿Cuántos galones de gasolina se consumen en EE.UU. en un día?

1.19 Una caja de papel para mecanografiar mide $11 \times 17 \times 9$ pulg y está marcada "10 M". ¿Indica eso que contiene diez mil hojas, o 10 millones?

1.20 ¿Cuántas semillas de maíz se necesitan para llenar una botella de refresco de 2 L?

1.21 ¿Cuántas palabras hay en este libro?

1.22 ¿Qué volumen total de aire respira una persona durante su vida? Compárelo con el volumen del Houston Astrodome. (Estime que una persona respira unos 500 cm^3 de aire en cada aliento.)

1.23 ¿Cuántos cabellos tiene en la cabeza?

1.24 ¿Cuántas veces late el corazón de una persona en su vida? ¿Cuántos galones de sangre bombea? (Estime que el corazón bombea 50 cm^3 de sangre en cada latido.)

1.25 En la ópera *El anillo de los Nibelungos* de Wagner, la diosa Freya es rescatada con una pila de oro con la altura y anchura suficientes para ocultarla. Estime el valor monetario de la pila. (En el ejemplo 1.4 hay datos sobre el precio por onza y la densidad del oro.)

1.26 ¿Cuántas gotas de agua hay en todos los océanos de la Tierra?

1.27 ¿Cuántas pizzas consumen cada año escolar los estudiantes de su escuela?

1.28 ¿Cuántos billetes de un dólar habría que apilar para llegar a la Luna? Sería más económico que construir y lanzar una nave?

-YOUN.8684.cp01.001-039.CTPv3 5/12/04 12:27 PM Page 35

1.29 ¿Cuánto costaría tapizar todo Estados Unidos (incluidos Alaska y Hawai) con billetes de un dólar? ¿Cuánto tendría que aportar cada estadounidense?

Sección 1.7 Vectores y suma de vectores

1.30 Al oír el cascabel de una serpiente usted realiza 2 desplazamientos rápidos de 1.8 m y 2.4 m. Haga dibujos a escala aproximada mostrando cómo dichos desplazamientos podrían dar una resultante de magnitud a) 4.2 m; b) 0.5 m; c) 3.0 m.

1.31 Un empleado postal conduce su camión por la ruta de la figura 1.26. Determine la magnitud y dirección del desplazamiento resultante en un diagrama a escala. (En el ejercicio 1.38 se aborda de otra manera este problema.)

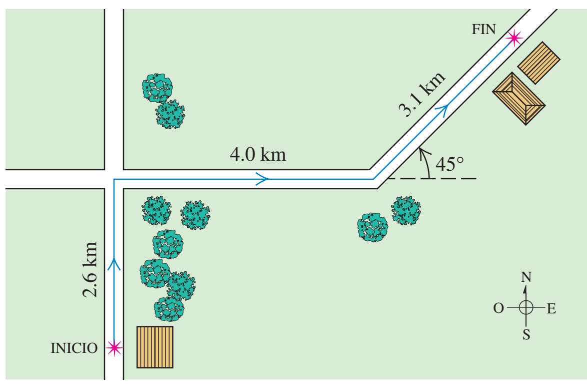


Figura 1.26 Ejercicios 1.31 y 1.38.

1.32 Con los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ de la figura 1.27, use un dibujo a escala para obtener la magnitud y dirección de a) la resultante $\vec{A} + \vec{B}$; b) la diferencia $\vec{A} - \vec{B}$. Con base en sus respuestas a (a) y (b), deduzca la magnitud y dirección de c) $-\vec{A} - \vec{B}$; d) $\vec{B} - \vec{A}$. (El ejercicio 1.39 enfoca el problema de otra manera.)

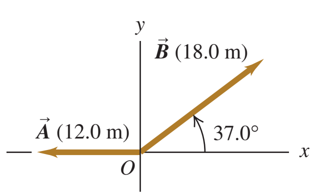


Figura 1.27 Ejercicios 1.32, 1.39, 1.44 y 1.54.

1.33 Una espeleóloga está explorando una cueva; sigue un pasadizo 180 m al oeste, luego 210 m 45º al este del sur, después 280 m 30º al este del norte. Tras un cuarto desplazamiento no medido, vuelve al punto inicial. Determine con un diagrama a escala el cuarto desplazamiento (magnitud y dirección). (El problema 1.69 enfoca de manera distinta este problema.)

Sección 1.8 Componentes de vectores

1.34 Use un dibujo a escala para obtener las componentes x y y de los vectores siguientes. Se da i) la magnitud del vector y ii) el ángulo que forma con el eje $+x$, medido desde el eje $+x$ hacia el eje $+y$. a) Magnitud 9.30 m, ángulo 60.0º; b) magnitud 22.0 km, ángulo 135º; c) magnitud 6.35 cm, ángulo 307º.

1.35 Calcule las componentes x y y de los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ de la figura 1.28.

1.36 Sea el ángulo θ el que forma el vector $\vec{A}$ con el eje $+x$, medido en sentido antihorario a partir de ese eje. Obtenga el ángulo θ para un vector que tiene estas componentes: $A_x = 2.00$ m, $A_y = -1.00$ m; b) $A_x = 2.00$ m, $A_y = 1.00$ m, c) $A_x = -2.00$ m, $A_y = 1.00$ m, d) $A_x = -2.00$ m, $A_y = -1.00$ m.

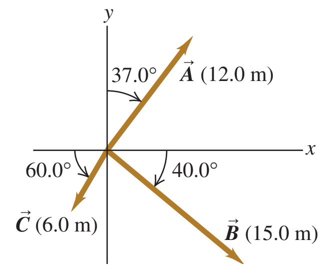


Figura 1.28 Ejercicios 1.35, 1.45 y 1.50, y problema 1.68.

1.37 Un cohete dispara dos motores simultáneamente. Uno produce un empuje de 725 N directamente hacia adelante, mientras que el otro produce un empuje de 513 N 32.4° arriba de la dirección hacia adelante. Obtenga la magnitud y dirección (relativa a la dirección hacia adelante) de la fuerza resultante que estos motores ejercen sobre el cohete.

1.38 Un empleado postal conduce su camión por la ruta de la figura 1.26. Use el método de componentes para determinar la magnitud y dirección de su desplazamiento resultante. En un diagrama de suma de vectores (a escala aproximada), muestre que el desplazamiento resultante obtenido del diagrama coincide cualitativamente con el obtenido con el método de componentes.

1.39 Para los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ de la figura 1.27, use el método de componentes para obtener la magnitud y dirección de a) $\vec{A} + \vec{B}$; b) la suma vectorial $\vec{B} + \vec{A}$; c) la diferencia vectorial $\vec{A} - \vec{B}$; d) la diferencia vectorial $\vec{B} - \vec{A}$.

1.40 Calcule la magnitud y dirección del vector representado por los siguientes pares de componentes: a) $A_x = -8.60$ cm, $A_y = 5.20$ cm; b) $A_x = -9.70$ m, $A_y = -2.45$ m; c) $A_x = 7.75$ km, $A_y = -2.70$ km.

1.41 Un profesor de física desorientado conduce 3.25 km al norte, 4.75 km al oeste y 1.50 km al sur. Calcule la magnitud y dirección del desplazamiento resultante, usando el método de componentes. En un diagrama de suma de vectores (a escala aproximada), muestre que el desplazamiento resultante obtenido del diagrama coincide cualitativamente con el obtenido con el método de componentes.

1.42 El vector $\vec{A}$ tiene componentes $A_x = 1.30$ cm, $A_y = 2.25$ cm; el vector $\vec{B}$ tiene componentes $B_x = 4.10$ cm, $B_y = -3.75$ cm. Calcule a) las componentes de la resultante $\vec{A} + \vec{B}$; b) la magnitud y dirección de $\vec{A} + \vec{B}$; c) las componentes del vector diferencia $\vec{B} - \vec{A}$; d) la magnitud y dirección de $\vec{B} - \vec{A}$.

1.43 El vector $\vec{A}$ mide 2.80 cm y está 60.0º sobre el eje x en el primer cuadrante. El vector $\vec{B}$ mide 1.90 cm y está 60.0º bajo el eje x en el cuarto cuadrante (Fig. 1.29). Obtenga la magnitud y dirección de a) $\vec{A} + \vec{B}$; b) $\vec{A} - \vec{B}$; c) $\vec{B} - \vec{A}$. En cada caso, dibuje la suma o resta de vectores y demuestre que sus respuestas numéricas concuerdan con el dibujo.

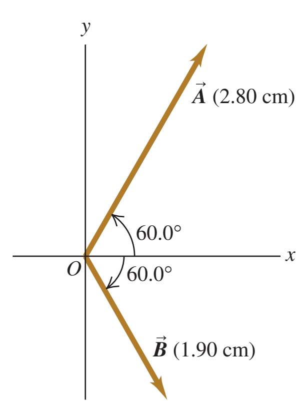


Figura 1.29 Ejercicios 1.43 y 1.56

-YOUN.8684.cp01.001-039.CTPv3 5/12/04 12:27 PM Page 36

Sección 1.9 Vectores unitarios

1.44 Escriba los vectores de la figura 1.27 en términos de los vectores unitarios $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$.

1.45 Escriba los vectores de la figura 1.28 en términos de los vectores unitarios $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$.

1.46 a) Escriba los vectores de la figura 1.30 en términos de los vectores unitarios $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$. b) Use vectores unitarios para expresar el vector $\vec{C}$, donde $\vec{C} = 3.00\vec{A} - 4.00\vec{B}$. c) Calcule la magnitud y dirección de $\vec{C}$.

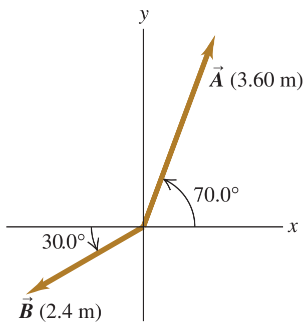


Figura 1.30 Ejercicio 1.46 y problema 1.82.

1.47 Dados los vectores $\vec{A} = 4.00\hat{\imath} + 3.00\hat{\jmath}$ y $\vec{B} = 5.00\hat{\imath} - 2.00\hat{\jmath}$, a) calcule las magnitudes de cada vector; b) escriba una expresión para $\vec{A} - \vec{B}$ usando vectores unitarios; c) obtenga la magnitud y dirección de $\vec{A} - \vec{B}$. d) Dibuje un diagrama vectorial que muestre $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{A} - \vec{B}$ y demuestre que coincide con su respuesta a la parte (c).

1.48 a) ¿El vector $(\hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k})$ es unitario? Justifique su respuesta. b) ¿Un vector unitario puede tener alguna componente con magnitud mayor que la unidad? ¿Puede tener alguna componente negativa? En cada caso, justifique su respuesta. c) Si $\vec{A} = a(3.0\hat{\imath} + 4.0\hat{\jmath})$, donde a es una constante, determine el valor de a que convierte a $\vec{A}$ en un vector unitario.

1.49 a) Use componentes vectoriales para demostrar que tanto la suma como el producto escalar de dos vectores son conmutativos. b) Use componentes vectoriales para demostrar que el producto vectorial de dos vectores es anticonmutativo. Es decir, demuestre que $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$.

Sección 1.10 Productos de vectores

1.50 Para los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ de la figura 1.28, obtenga los productos escalares a) $\vec{A} \cdot \vec{B}$; b) $\vec{B} \cdot \vec{C}$; c) $\vec{A} \cdot \vec{C}$.

1.51 a) Obtenga el producto escalar de los dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ dados en el ejercicio 1.47. b) Obtenga el ángulo entre esos dos vectores.

1.52 Calcule el ángulo entre estos pares de vectores:

a) $\vec{A} = -2.00\hat{\imath} + 6.00\hat{\jmath}$ y $\vec{B} = 2.00\hat{\imath} - 3.00\hat{\jmath}$

b) $\vec{A} = 3.00\hat{\imath} + 5.00\hat{\jmath}$ y $\vec{B} = 10.00\hat{\imath} + 6.00\hat{\jmath}$

c) $\vec{A} = -4.00\hat{\imath} + 2.00\hat{\jmath}$ y $\vec{B} = 7.00\hat{\imath} + 14.00\hat{\jmath}$

1.53 Suponiendo un sistema derecho de coordenadas, encuentre la dirección del eje $+z$ en a) la figura 1.15a; b) la figura 1.15b.

1.54 Para los dos vectores de la figura 1.27, a) obtenga la magnitud y dirección del producto vectorial $\vec{A} \times \vec{B}$; b) obtenga la magnitud y dirección de $\vec{B} \times \vec{A}$.

1.55 Obtenga el producto cruz $\vec{A} \times \vec{B}$ (expresado en vectores unitarios) de los vectores del ejercicio 1.47. ¿Qué magnitud tiene el producto vectorial?

1.56 Para los vectores de la figura 1.29, a) calcule la magnitud y dirección del producto vectorial $\vec{A} \times \vec{B}$; b) obtenga la magnitud y dirección de $\vec{B} \times \vec{A}$.

Problemas

1.57 Un acre, unidad de agrimensura que todavía se usa mucho, tiene una longitud de un furlong $\left(\frac{1}{8}\text{ mi}\right)$ y su anchura es un décimo de su longitud. a) ¿Cuántos acres hay en una milla cuadrada? b) Cuántos pies cuadrados hay en un acre? (Vea el apéndice E.) c) Un acre-pie es el volumen de agua que cubriría un acre de terreno plano hasta 1 ft de profundidad. ¿Cuántos galones hay en un acre-pie?

1.58 Una propiedad en la costa de California se ofreció a la venta en \$4,950,000. Su área total era de 102 acres (véase el problema 1.57). a) Considerando que el precio de la propiedad es proporcional a su área, ¿cuánto costaba un metro cuadrado de la propiedad? b) ¿Cuánto costaría una porción de la propiedad del tamaño de un sello de correo $\left(\frac{7}{8}\right.$ pulg por 1.0 pulg$\left.\right)$?

1.59 El máser de hidrógeno. Las ondas de radio generadas por un máser de hidrógeno pueden servir como estándar de frecuencia. La frecuencia de las ondas es 1,420,405,751.786 hertz. (Un hertz es un ciclo por segundo.) Un reloj controlado por máser de hidrógeno tiene un error de 1 s en 100,000 años. Para lo que sigue, use sólo tres cifras significativas. (El gran número de cifras dadas para la frecuencia meramente ilustra la notable exactitud con que se midió.) a) ¿Cuánto dura un ciclo de la onda de radio? b) ¿Cuántos ciclos ocurren en 1 h? c) ¿Cuántos ciclos habrán pasado durante la edad de la Tierra, estimada en 4.6×10^9 años? d) ¿Qué error tendría un reloj de máser de hidrógeno después de un lapso semejante?

1.60 Estime cuántos átomos hay en su cuerpo. (*Sugerencia:* Con base en sus conocimientos de biología y química, ¿cuáles son los tipos de átomos más comunes en su cuerpo? ¿Qué masa tiene cada tipo? El apéndice D da la masa atómica de diversos elementos, medida en unidades de masa atómica; el valor de una unidad de masa atómica (1 u) se da en el apéndice F.)

1.61 Los tejidos biológicos normalmente contienen 98% de agua. Dado que la densidad del agua es de 1.0×10^3 kg/m^3, estime la masa de a) el corazón de un ser humano adulto; b) una célula de 0.5 μm de diámetro; c) una abeja.

1.62 El hierro tiene la propiedad de que un volumen de 1.00 m^3 tiene una masa de 7.86×10^3 kg (densidad = 7.86×10^3 kg/m^3). Se desea formar cubos y esferas de hierro. Determine a) la longitud del lado de un cubo de hierro que tiene una masa de 200 g; b) el radio de una esfera sólida de hierro que tiene una masa de 200 g.

1.63 a) Estime el número de dentistas que hay en su ciudad. Necesitará considerar el número de habitantes, la frecuencia con que deben visitar al dentista, la frecuencia con que realmente lo visitan, las horas que tarda un procedimiento odontológico típico (obturación, endodoncia, etc.) y las horas que un dentista trabaja a la semana. b) Utilizando su directorio telefónico local, verifique si su estimación se acercó a la cifra real.

1.64 Los físicos, matemáticos y otros a menudo manejan números grandes. Los matemáticos inventaron el curioso nombre *googol* para el número 10^{100}. Comparemos algunos números grandes de la física con el googol. (*Nota:* Consulte los valores numéricos en los apéndices y familiarícese con ellos.) a) Aproximadamente, ¿cuántos átomos componen la Tierra? Por sencillez, suponga una masa atómica media de 14 g/mol. El número de Avogadro da el número de átomos en un mol. b) ¿Como cuántos neutrones hay en una estrella

de neutrones? Tales estrellas sólo contienen neutrones y tienen aproximadamente dos veces la masa del Sol. c) La principal teoría del origen del Universo dice que, hace mucho, todo el Universo observable ocupaba una esfera de radio aproximadamente igual a la distancia actual de la Tierra al Sol y tenía una densidad (masa entre volumen) de 10^{15} g/cm^3. Suponiendo que 10^{15} g/cm^3 eran neutrones y $\frac{1}{3}$ de las partículas eran protones, $\frac{1}{3}$ eran electrones, ¿cuántas partículas había en el Universo?

1.65 Tres cuerdas horizontales tiran de una piedra grande medio enterrada en el suelo, produciendo los vectores de fuerza $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ que se muestran en la figura 1.31. Obtenga la magnitud y dirección de una cuarta fuerza aplicada a la piedra que haga que el vector sumatoria de las cuatro fuerzas sea cero.

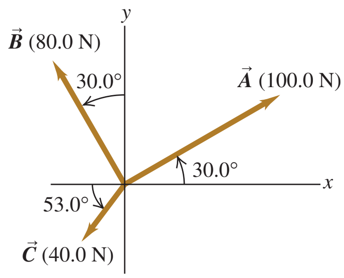


Figura 1.31 Problema 1.65.

1.66 Aterrizaje de emergencia. Un avión sale del aeropuerto de Galisto y vuela 170 km en una dirección 68° al este del norte; luego cambia el rumbo y vuela 230 km 48° al sur del este, para efectuar inmediatamente un aterrizaje de emergencia en un potrero. En qué dirección y qué distancia deberá volar una cuadrilla de rescate enviada por el aeropuerto para llegar directamente al avión averiado?

1.67 Le han pedido programar un brazo robot de una línea de ensamble que se mueve en el plano *xy*. Su primer desplazamiento es $\vec{A}$; el segundo es $\vec{B}$, de magnitud 6.40 cm y dirección 63.0º medida en el sentido del eje $+x$ al eje $-y$. La resultante $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ también debe tener una magnitud de 6.40 cm pero una dirección de 22.0º medida en el sentido del eje $+x$ al eje $+y$. a) Dibuje el diagrama de la suma de estos vectores, aproximadamente a escala. b) Obtenga las componentes de $\vec{A}$. c) Obtenga la magnitud y dirección de $\vec{A}$.

1.68 a) Obtenga la magnitud y dirección del vector $\vec{R}$ que es la suma de $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ de la figura 1.28. En un diagrama, muestre cómo se forma $\vec{R}$ a partir de los tres vectores. b) Obtenga la magnitud y dirección del vector $\vec{S} = \vec{C} - \vec{A} - \vec{B}$. En un diagrama, muestre cómo se forma $\vec{S}$ a partir de los tres vectores.

1.69 La espeleóloga del ejercicio 1.33 está explorando una cueva. Sigue un pasadizo 180 m al oeste, luego 210 m en una dirección 45º al este del sur, luego 280 m 30º al este del norte. Tras un cuarto desplazamiento no medido, vuelve al punto inicial. Use el método de componentes para determinar el cuarto desplazamiento (magnitud y dirección). Dibuje el diagrama de la suma vectorial y demuestre que concuerda cualitativamente con su solución numérica.

1.70 Una marinera en un velero pequeño se topa con vientos cambiantes. Navega 2.00 km al este, 3.50 km al sureste y luego otro tramo en una dirección desconocida. Su posición final es 5.80 km al este del punto inicial (Fig. 1.32). Determine la magnitud y dirección del tercer tramo. Dibuje el diagrama de suma vectorial y demuestre que concuerda cualitativamente con su solución numérica.

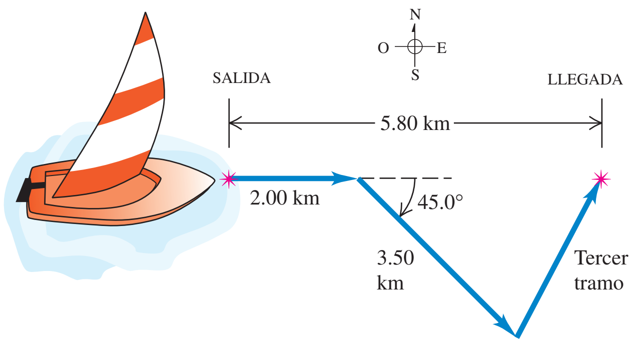


Figura 1.32 Problema 1.70.

1.71 Un esquiador viaja a campo traviesa 2.80 km en una dirección 45.0º al oeste del sur, luego 7.40 km en una dirección 30.0º al norte del oeste y por último 3.30 km en la dirección 22.0º al sur del oeste. a) Muestre los desplazamientos en un diagrama. b) ¿A qué distancia está el esquiador del punto de partida?

1.72 En un vuelo de práctica, una piloto estudiante vuela de Lincoln, Nebraska, a Clarinda, Iowa; luego a St. Joseph, Missouri y después a Manhattan, Kansas (Fig. 1.33). Las direcciones se muestran relativas al norte: 0º es norte, 90º es este, 180º es sur y 270º es oeste. Use el método de componentes para averiguar a) la distancia que debe volar para regresar a Lincoln desde Manhattan; b) la dirección (relativa al norte) que debe seguir. Ilustre su solución con un diagrama vectorial.

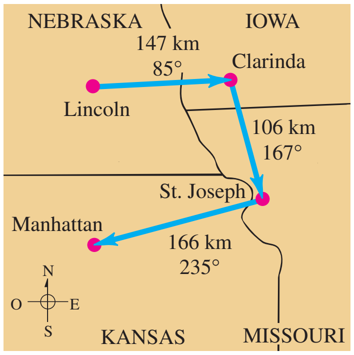


Figura 1.33 Problema 1.72.

1.73 Una diseñadora está creando un nuevo logotipo para el sitio Web de su empresa. En el programa que está usando, cada pixel de un archivo de imagen tiene coordenadas (x, y), donde el origen $(0, 0)$ está en la esquina superior izquierda de la imagen, el eje $+x$ apunta a la derecha y el eje $+y$ apunta hacia abajo. Las distancias se miden en pixeles. a) La diseñadora traza una línea del punto (10, 20) al punto (210, 200). Quiere trazar una segunda línea que parta de (10, 20), tenga 250 pixeles de longitud y forme un ángulo de 30° medido en sentido horario a partir de la primera línea. ¿En qué punto deberá terminar la segunda línea? Dé su respuesta con precisión de enteros. b) Ahora la diseñadora traza una flecha que conecta el extremo inferior derecho de la primera línea con el extremo inferior derecho de la segunda. Determine la longitud y dirección de esta flecha. Haga un diagrama que muestre las tres líneas.

1.74 Regreso. Un explorador en las espesas junglas del África ecuatorial sale de su choza. Camina 40 pasos al noreste, 80 pasos 60° al norte del oeste y 50 pasos al sur. Suponga que todos sus pasos tienen la misma longitud. a) Dibuje, aproximadamente a escala, los tres vectores y su resultante. b) Sálvelo de perderse irremediablemente en la jungla dándole el desplazamiento, calculado con el método de componentes, que lo llevará de regreso a su choza.

-YOUN.8684.cp01.001-039.CTPv3 5/12/04 12:27 PM Page 38

1.75 Un barco zarpa de la isla de Guam y navega 285 km con rumbo 40.0° al norte del oeste. ¿Qué rumbo deberá tomar ahora y qué distancia deberá navegar para que su desplazamiento resultante sea 115 km directamente al este de Guam?

1.76 Un peñasco con peso w descansa en una ladera que se eleva con un ángulo constante α sobre la horizontal, como se muestra en la figura 1.34. Su peso es una fuerza sobre el peñasco con dirección vertical hacia abajo. a) En términos de α y w, ¿qué componente tiene el peso del peñasco en la dirección paralela a la superficie de la ladera? b) ¿Qué componente tiene el peso en la dirección perpendicular a la superficie de la ladera? c) Una unidad de aire acondicionado está montada en un techo que tiene una pendiente de 35.0°. Para que la unidad no resbale, la componente del peso de la unidad, paralela al techo, no puede exceder 550 N. ¿Cuánto puede pesar como máximo la unidad?

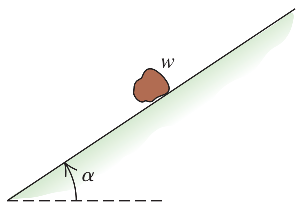


Figura 1.34 Problema 1.76.

1.77 Huesos y músculos. El antebrazo de una paciente en terapia pesa 25.0 N y levanta una pesa de 112.0 N. Estas dos fuerzas están dirigidas verticalmente hacia abajo. Las únicas otras fuerzas apreciables que actúan sobre el antebrazo provienen del músculo bíceps (que actúa perpendicular al antebrazo) y la fuerza en el codo. Si el bíceps produce un empuje de 232 N cuando el antebrazo se alza 43° sobre la horizontal, determine la magnitud y dirección de la fuerza que el codo ejerce sobre el antebrazo. (La suma de la fuerza del codo y la del bíceps debe equilibrar el peso del antebrazo y la pesa que carga, así que su vector sumatoria debe ser 132.5 N hacia arriba.)

1.78 Usted tiene hambre y decide visitar su restaurante de comida rápida preferido. Sale de su departamento, baja 10 pisos en el elevador (cada piso tiene 3.0 m de altura) y camina 15 m al sur hacia la salida del edificio. Luego camina 0.2 km al este, da vuelta al norte y camina 0.1 km hasta la entrada del restaurante. a) Determine el desplazamiento entre su departamento y el restaurante. Use notación de vectores unitarios en su respuesta, dejando bien en claro qué sistema de coordenadas escogió. b) ¿Qué distancia recorrió por el camino que siguió de su departamento al restaurante y qué magnitud tiene el desplazamiento que calculó en la parte (a)?

1.79 Imagine que pasea en canoa en un lago. Desde su campamento en la orilla, rema 240 m en una dirección 32° al sur del este para llegar a un almacén donde compra víveres. Conoce la distancia porque ha localizado tanto el campamento como el almacén en un mapa. Al regreso, rema una distancia B en la dirección 48° al norte del oeste y una distancia C en la dirección 62° al sur del oeste para volver a su campamento. Ha medido con su brújula las direcciones en que remó, pero no conoce las distancias. Dado que le interesa conocer la distancia total que remó, use métodos vectoriales para calcular B y C.

1.80 Imagine que acampa con dos amigos, José y Carlos. Puesto que a los tres les gusta la privacía, no levantan sus tiendas juntas. La de José está a 21.0 m de la suya, en dirección 23.0° al sur del este. La de Carlos está a 32.0 m de la suya, en dirección 37.0° al norte del este. ¿Qué distancia hay entre las tiendas de José y de Carlos?

1.81 Los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ se dibujan desde un punto común. $\vec{A}$ tiene magnitud A y ángulo θ_A medido del eje $+x$ al eje $+y$. Las cantidades $\vec{B}$ son B y θ_B. Entonces $\vec{A} = A\cos\theta_A\hat{\imath} + A\,\mathrm{sen}\,\theta_A\hat{\jmath}$, $\vec{B} = B\cos\theta_B\hat{\imath} + B\,\mathrm{sen}\,\theta_B\hat{\jmath}$, y $\phi = |\theta_B - \theta_A|$ es el ángulo entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$. a) Deduzca la ecuación (1.18) a partir de la (1.21). b) Deduzca la ecuación (1.22) de la (1.27).

1.82 Para los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ de la figura 1.30, a) obtenga el producto escalar $\vec{A}\cdot\vec{B}$; b) obtenga la magnitud y dirección del producto vectorial $\vec{A}\times\vec{B}$.

1.83 La figura 1.8c muestra un paralelogramo basado en los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$. a) Demuestre que la magnitud del producto cruz de estos dos vectores es igual al área del paralelogramo. (*Sugerencia:* área = base × altura.) b) ¿Qué ángulo hay entre el producto cruz y el plano del paralelogramo?

1.84 El vector $\vec{A}$ tiene 3.50 cm de longitud y está dirigido hacia dentro del plano de la página. El vector $\vec{B}$ apunta de la esquina inferior derecha a la esquina superior izquierda de esta página. Defina un sistema derecho apropiado de coordenadas y obtenga las tres componentes del producto $\vec{A}\times\vec{B}$, medidas en cm^2. En un diagrama, represente su sistema de coordenadas y los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{A}\times\vec{B}$.

1.85 Dados dos vectores $\vec{A} = -2.00\hat{\imath} + 3.00\hat{\jmath} + 4.00\hat{k}$ y $\vec{B} = 3.00\hat{\imath} + 1.00\hat{\jmath} - 3.00\hat{k}$, a) obtenga la magnitud de cada vector; b) Escriba una expresión para la diferencia $\vec{A} - \vec{B}$, empleando vectores unitarios; c) obtenga la magnitud de la diferencia $\vec{A} - \vec{B}$. ¿Es igual que la magnitud de $\vec{B} - \vec{A}$? Explique.

1.86 Ángulo de enlace del metano. En la molécula de metano, CH_4, cada átomo de hidrógeno está en la esquina de un tetraedro regular, con el átomo de carbono en el centro. En coordenadas en las que uno de los enlaces C−H esté en la dirección de $\hat{\imath} - \hat{\jmath} - \hat{k}$, un enlace C−H adyacente está en la dirección $\hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k}$, Calcule el ángulo entre los enlaces.

1.87 Dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ se dibujan desde un punto común, y $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$. a) Demuestre que si $C^2 = A^2 + B^2$, el ángulo entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$ es 90°. b) Demuestre que si $C^2 < A^2 + B^2$, el ángulo entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$ es mayor que 90º. c) Demuestre que si $C^2 > A^2 + B^2$, el ángulo entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$ está entre 0º y 90º.

1.88 Si dibujamos dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ desde un punto común, el ángulo entre ellos es ϕ. a) Con técnicas vectoriales, demuestre que la magnitud de su suma es

$$\sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\phi}$$

b) Si $\vec{A}$ y $\vec{B}$ tienen la misma magnitud, ¿con qué valor de ϕ su suma tendrá la misma magnitud que $\vec{A}$ o $\vec{B}$? c) Deduzca un resultado análogo al de (a) para la diferencia $\vec{A} - \vec{B}$. d) Si $\vec{A}$ y $\vec{B}$ tienen la misma magnitud, ¿con qué valor de ϕ tendrá $\phi\vec{A} - \vec{B}$ esa magnitud?

1.89 Un cubo se coloca de modo que una esquina esté en el origen y tres aristas estén el los ejes x, y y z de un sistema de coordenadas (Fig. 1.35). Use vectores para calcular a) el ángulo entre la arista sobre el eje z (línea ab) y la diagonal que va del origen a la esquina opuesta (línea ad); b) el ángulo entre ad y ac (la diagonal de una cara).

1.90 Obtenga un *vector unitario* perpendicular a los dos vectores dados en el problema 1.85.

-YOUN.8684.cp01.001-039.CTPv3 5/12/04 12:27 PM Page 39

1.91 Le dan los vectores $\vec{A} = 5.0\hat{\imath} - 6.5\hat{\jmath}$ y $\vec{B} = -3.5\hat{\imath} + 7.0\hat{\jmath}$. Un tercer vector $\vec{C}$ está en el plano xy y es perpendicular a $\vec{A}$, el producto escalar de $\vec{C}$ con $\vec{B}$ es 15.0. Con esta información, obtenga las componentes del vector $\vec{C}$.

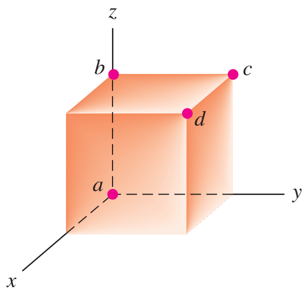


Figura 1.35 Problema 1.89.

1.92 Dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ tienen magnitudes $A = 3.00$ y $B = 3.00$. Su producto cruz es $\vec{A} \times \vec{B} = -5.00\hat{k} + 2.00\hat{\imath}$. ¿Qué ángulo forman $\vec{A}$ y $\vec{B}$?

1.93 Más adelante encontraremos cantidades representadas por $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}$. a) Demuestre que, para cualesquier $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$, $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}$. b) Calcule $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} \cdot \vec{A}$ tiene magnitud $A = 5.00$ y ángulo $\theta_A = 26.0º$ medido del eje $+x$ al $+y$, $\vec{B}$ tiene $B = 4.00$ y $\theta_B = 63.0º$ y $\vec{C}$ tiene magnitud 6.00 y sigue el eje $+z$. $\vec{A}$ y $\vec{B}$ están en el plano xy.

Problemas de desafío

1.94 La longitud de un rectángulo se da como $L \pm l$ y su anchura como $W \pm w$. a) Demuestre que la incertidumbre de su área A es $a = Lw + lW$. Suponga que l y w son pequeñas y puede despreciarse el producto lw. b) Demuestre que la incertidumbre fraccionaria del área es igual a la suma de las incertidumbres fraccionarias de la longitud y la anchura. c) Un cuerpo regular tiene dimensiones $L \pm l$, $W \pm w$ y $H \pm h$. Obtenga la incertidumbre fraccionaria del volumen y demuestre que es igual a la suma de las incertidumbres fraccionarias de la longitud, la anchura y la altura.

1.95 Pase completo. En la Universidad Autónoma de Inmensidad (UAI), el equipo de fútbol americano registra sus jugadas con desplazamientos vectoriales, siendo el origen la posición del balón al iniciar la jugada. En cierta jugada de pase, el receptor parte de $+1.0\hat{\imath} - 5.0\hat{\jmath}$, donde las unidades son yardas, $\hat{\imath}$ es a la derecha y $\hat{\jmath}$ es hacia adelante. Los desplazamientos subsecuentes del receptor son $+9.0\hat{\imath}$ (en movimiento antes de salir la jugada), $+11.0\hat{\jmath}$ (sale hacia adelante), $-6.0\hat{\imath} + 4.0\hat{\jmath}$ (a un lado) y $+12.0\hat{\imath} + 18.0\hat{\jmath}$ (a otro lado). Mientras, el mariscal de campo retrocedió $-7.0\hat{\jmath}$. ¿Qué tan lejos y en qué dirección debe el mariscal lanzar el balón? (Al igual que al entrenador, le recomendamos diagramar la situación antes de resolverla numéricamente.)

1.96 Navegación en el Sistema Solar. La nave *Mars Polar Lander* se lanzó el 3 de enero de 1999. El 3 de diciembre de 1999, el día en que la nave se posó en la superficie de Marte, las posiciones de la Tierra y Marte estaban dadas por estas coordenadas:

	x	y	z
Tierra	0.3182 UA	0.9329 UA	0.0000 UA
Marte	1.3087 UA	−0.4423 UA	−0.0414 UA

En estas coordenadas, el Sol está en el origen y el plano de la órbita de la Tierra es el plano xy. La Tierra pasa por el eje $+x$ una vez al año en el equinoccio de otoño, el primer día de otoño en el hemisferio norte (cerca del 22 de sep.). Una UA (*unidad astronómica*) es igual a 1.496×10^8 km, la distancia media de la Tierra al Sol. a) Dibuje un diagrama que muestre las posiciones del Sol, la Tierra y Marte el 3 de diciembre de 1999. b) Calcule las siguientes distancias en UA el 3 de diciembre de 1999: (i) del Sol a la Tierra; (ii) del Sol a Marte; (iii) de la Tierra a Marte. c) Visto desde la Tierra, ¿qué ángulo había entre la dirección al Sol y la dirección a Marte el 3 de diciembre de 1999? d) Indique si Marte se veía desde donde usted estaba el 3 de diciembre de 1999 a media noche. (Cuando es la media noche en su posición, el Sol está en el lado opuesto de la Tierra.)

1.97 Navegación en la Osa Mayor. Las estrellas de la Osa Mayor parecen estar todas a la misma distancia de la Tierra, pero en realidad están muy lejanas entre sí. La figura 1.36 muestra las distancias desde la Tierra a cada estrella en años luz (al), la distancia que la luz viaja en un año. Un año luz es 9.461×10^{15} m. a) Alkaid y Merak están separadas 25.6º en el firmamento. Dibuje un diagrama que muestre las posiciones relativas de Alkaid, Merak y el Sol. Obtenga la distancia en años luz de Alkaid a Merak. b) Para un habitante de un planeta en órbita alrededor de Merak, ¿cuántos grados de separación habría entre Alkaid y el Sol?

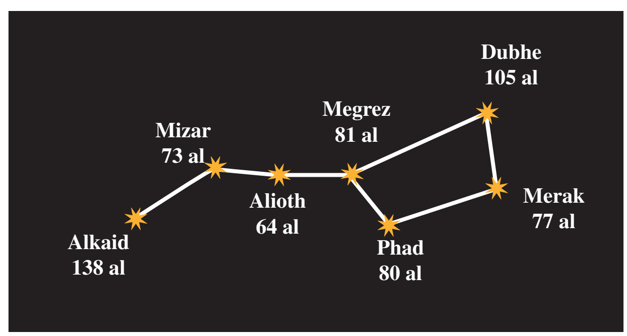


Figura 1.36 Problema de desafío 1.97.

1.98 El vector $\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$, llamado *vector de posición*, apunta del origen (0, 0, 0) a un punto arbitrario en el espacio cuyas coordenadas son (x, y, z). Use sus conocimientos de vectores para demostrar que todos los puntos (x, y, z) que satisfacen la ecuación $Ax + By + Cz = 0$, donde A, B y C son constantes, están en un plano que pasa por el origen y es perpendicular al vector $A\hat{\imath} + B\hat{\jmath} + C\hat{k}$. Dibuje este vector y el plano.