CIENCIAS (FÍSICA, QUÍMICA, BIOLOGÍA)
MÓDULO 3
Eje temático: Mecánica - Fluidos

I. Mecánica

1. Conceptos generales

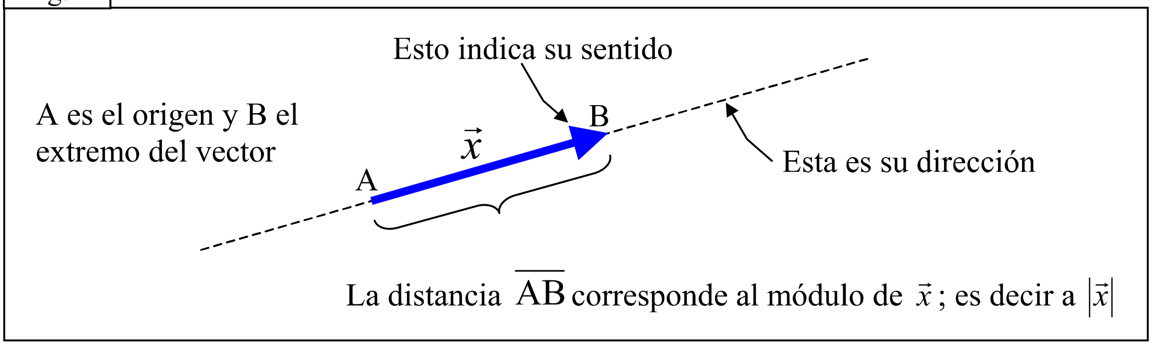
La mecánica en esta unidad se centra principalmente en el movimiento circular uniforme, en las rotaciones y en la ley de conservación de la energía mecánica.

1.1. Vectores

Para describir en forma adecuada el movimiento de un objeto en el plano, como el caso del movimiento circular uniforme, es de gran utilidad emplear *vectores*. Estos pueden ser entendidos como flechas y sirven para representar magnitudes físicas que poseen *dirección*, *sentido* y *módulo*.

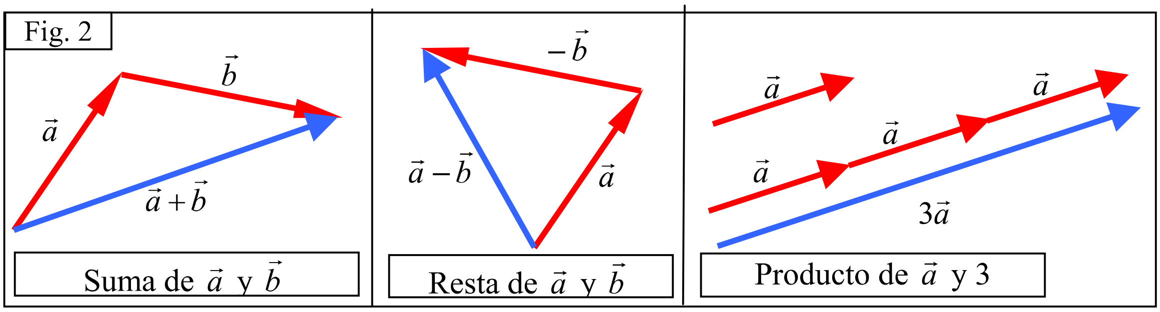
La figura 1 ilustra las características de un vector $\vec{x}$:

Fig. 1



Las magnitudes físicas se pueden clasificar en *vectoriales* y *escalares*. Las primeras son todas aquellas que tienen asociada una dirección y un sentido en el espacio, como por ejemplo la velocidad, la aceleración y la fuerza. Entre las segundas, en que la dirección y sentido carecen de significado, tenemos la masa, la temperatura, y la energía. Comprender las magnitudes vectoriales es de gran importancia, pues ocupan un lugar importante en todos los contenidos de Tercer y Cuarto Año Medio.

Para los vectores se han definido algunas operaciones, de las cuales las más importantes aquí son la suma o adición entre vectores, el producto de un vector por escalar y la resta. Estas operaciones se ilustran en la figura 2.



El módulo de un vector se representa entre barras; por ejemplo, el módulo de la velocidad, que denominamos *rapidez*, se expresa como $|\vec{v}|$. Así, cuando decimos que un vehículo viaja a 80 km/h estamos expresando su rapidez, cuando decimos que un vehículo viaja a 80 km/h hacia el norte, como además estamos expresando la dirección y sentido en que se mueve, estamos habando de velocidad $\vec{v}$.

Debes notar que, en general, $|\vec{a}+\vec{b}| \neq |\vec{a}|+|\vec{b}|$ y que, cuando $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son perpendiculares, entonces $|\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2}$; es decir, se aplica el teorema de Pitágoras.

1.2. Vectores que describen movimientos

Algunos vectores son particularmente útiles para describir los movimientos. Entre ellos están la *posición*, el *desplazamiento*, la *velocidad* y la *aceleración*, que expresaremos respectivamente como $\vec{r}$, $\Delta\vec{r}$, $\vec{v}$ y $\vec{a}$.

El esquema de la figura 3 muestra estos vectores para el caso del movimiento de un insecto que se ha trasladado por cierta trayectoria (línea de puntos) desde la posición A a la B durante el tiempo Δt.

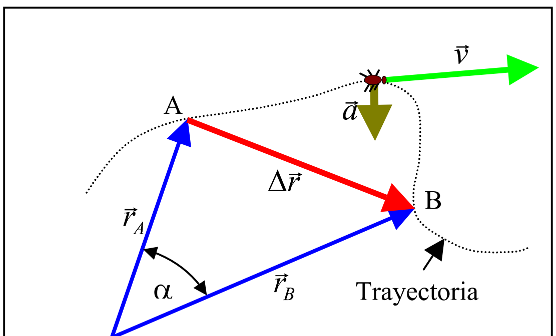


Fig. 3

P es un punto cualquiera de un sistema de referencias y en él se han colocado los orígenes de los vectores que indican las posiciones $\vec{r}_A$ y $\vec{r}_B$.

En la descripción vectorial de un movimiento como este hay que tener presente los siguientes aspectos:

- El desplazamiento corresponde a $\Delta\vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$ y su módulo es en general menor que la distancia entre los puntos A y B, medida a lo largo de la trayectoria y que denominaremos *camino recorrido*.
- La velocidad posee en cada instante la dirección y sentido del movimiento, es decir, en cada punto es tangente a la trayectoria.
- La aceleración en cada instante es $\vec{a} = \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$, para un Δt muy pequeño y, como consecuencia de esta definición, es un vector que siempre está dirigido hacia el interior de la trayectoria, cuando ella es curva.
- Si α es el ángulo descrito por el insecto en el tiempo Δt, en relación al punto P, entonces su rapidez angular se define como: $\omega = \dfrac{\alpha}{\Delta t}$.

2. Movimiento circular uniforme

El movimiento circunferencial uniforme es aquel cuya trayectoria es una circunferencia y cuya rapidez es constante. La figura 4 representa esta situación para un automóvil que está dando vueltas en una rotonda.

Es importante notar que en este caso, y en relación al centro de la trayectoria, el módulo de $\vec{r}$ corresponde al radio de la circunferencia, es decir, $|\vec{r}| = r$. La velocidad es en todo instante perpendicular a $\vec{r}$, es decir, $\vec{r} \perp \vec{v}$ y su módulo, por tratarse de un movimiento uniforme, es constante, es decir, $|\vec{v}|$ = constante.

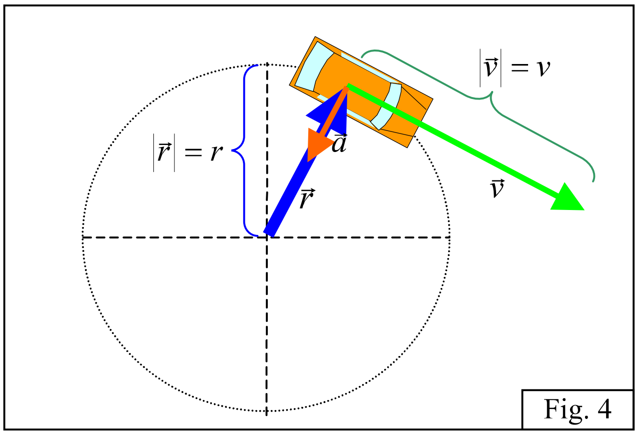


Fig. 4

Si T es el tiempo que tarda en completar una vuelta (período de traslación), entonces, como el perímetro de la circunferencia es $2\pi r$, la rapidez resulta ser $|\vec{v}| = \frac{2\pi r}{T}$ y la rapidez angular $\omega = \frac{360^o}{T}$, si los ángulos se expresan en grados sexagesimales, y $\omega = \frac{2\pi}{T}$ si los ángulos se expresan en radianes. En este último caso se ve claramente que $|\vec{v}| = \omega r$.

Con un poco de geometría, para el movimiento circunferencial uniforme se puede demostrar que la aceleración está exactamente dirigida hacia el centro de la circunferencia, razón por la cual se denomina *aceleración centrípeta*, y que su módulo es: $|\vec{a}| = \frac{|\vec{v}|^2}{r}$, o bien, $|\vec{a}| = \omega^2 r$.

Por ejemplo, si el radio de la trayectoria de un automóvil que se mueve en una rotonda es de 100 metros y tarda 31,4 segundos en dar una vuelta moviéndose uniformemente, entonces su rapidez es $|\vec{v}| = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 100 \text{ metros}}{31{,}4 \text{ segundos}}$ =*20 m/s* (72 km/h). Además su rapidez angular en relación al centro de su trayectoria debe ser $\omega = \frac{360^o}{31{,}4 \text{ segundos}}$ = 11,5 º/s o bien $\omega = \frac{2 \cdot 3{,}14 \text{ rad}}{31{,}4 \text{ segundos}} = 0{,}2 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ y su aceleración centrípeta $|\vec{a}| = \frac{(20 \text{ m/s})^2}{100 \text{ m}} = 4 \text{ m/s}^2$.

La fuerza también es una magnitud vectorial. En efecto, el segundo principio de Newton (principio de masa) debe escribirse así: $\vec{F} = m\vec{a}$, en que m es la masa del objeto y $\vec{a}$ su aceleración. Nótese que la fuerza posee la dirección y sentido de la aceleración, razón por la cual en el movimiento circunferencial uniforme, la fuerza está dirigida en cada instante también hacia el centro de la circunferencia. Por ello nos referimos a ella como *fuerza centrípeta* y su módulo lo podemos calcular con las expresiones: $|\vec{F}_C| = m\frac{|\vec{v}|^2}{r} = m\omega^2 r$.

Si el automóvil del ejemplo anterior posee una masa de 1.200 kg, la fuerza centrípeta sobre él debe ser $|\vec{F}_C| = 1.200 \text{ kg} \cdot 4 \text{ m/s}^2 = 4.800 \text{ newton}$.

La fuerza necesaria para que el automóvil de la figura 4 pueda dar vueltas en la rotonda es aplicada por el pavimento. En el caso de la persona que hace girar la piedra atada a un cordel (figura 5), la aplica el propio cordel y, en el caso de la Luna que orbita alrededor de la Tierra, es la propia Tierra la que, a distancia, actúa sobre ella por medio de la gravedad.

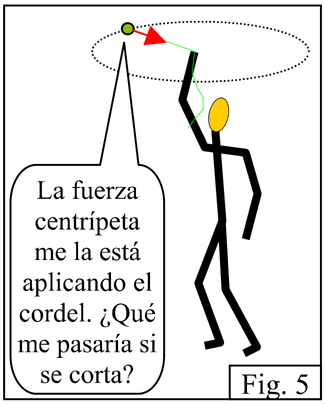


Fig. 5

3. Rotaciones y momento de inercia

Cuando un disco sólido, por ejemplo una rueda, gira en relación a un eje, como se ilustra en la figura 6, hablaremos de *rotación*. Debes notar que en estos casos cada punto del disco posee un movimiento circunferencial en relación al eje de giro. Mientras todos los puntos poseen la misma rapidez angular, solo poseen igual rapidez y aceleración los que se encuentran a igual distancia del eje de giro.

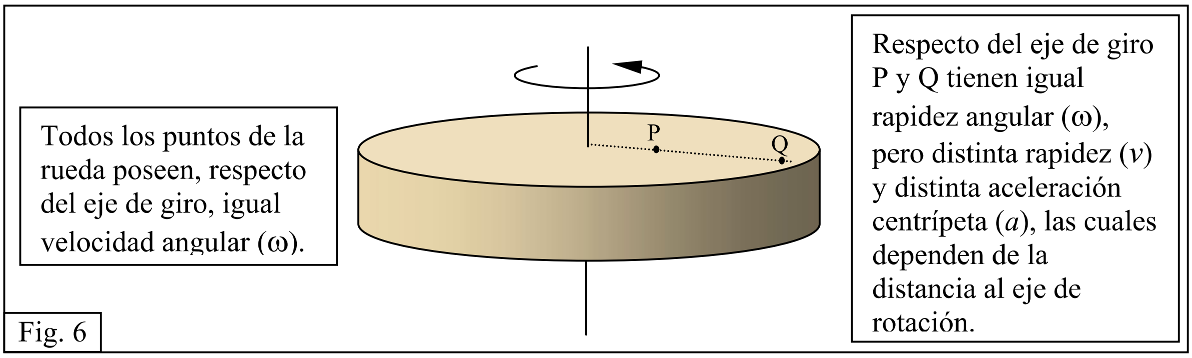


Fig. 6

El concepto de masa expresa la dificultad que presenta un objeto para que una fuerza modifique su estado de movimiento. Mientras más masa posea un objeto, mayor fuerza debemos aplicar para que al trasladarlo alcance cierta rapidez, o bien para detenerlo o también para desviar su trayectoria. Para hacer girar un cuerpo alrededor de un cierto eje ocurre algo similar.

Seguramente te has dado cuenta de que el esfuerzo que debes hacer para rotar un objeto, por ejemplo un libro, depende del eje en relación al cual lo hagas. Verifica lo que se ilustra en la figura 7.

El concepto físico que da cuenta de este hecho es el *momento de inercia*, que expresaremos por I. Esta es una magnitud más compleja, pues depende tanto de la masa, como del modo en que ella está distribuida en relación al eje de giro.

Fig. 7

Para el caso simple de una masa m situada en el extremo de una varilla de largo l, el momento de inercia corresponde, por definición, a $I = ml^2$, si el eje de giro es el que se indica en la figura 8. Por razones de simplicidad suponemos despreciable la masa de la varilla.

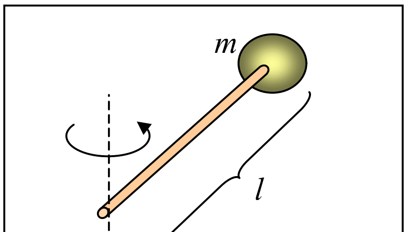
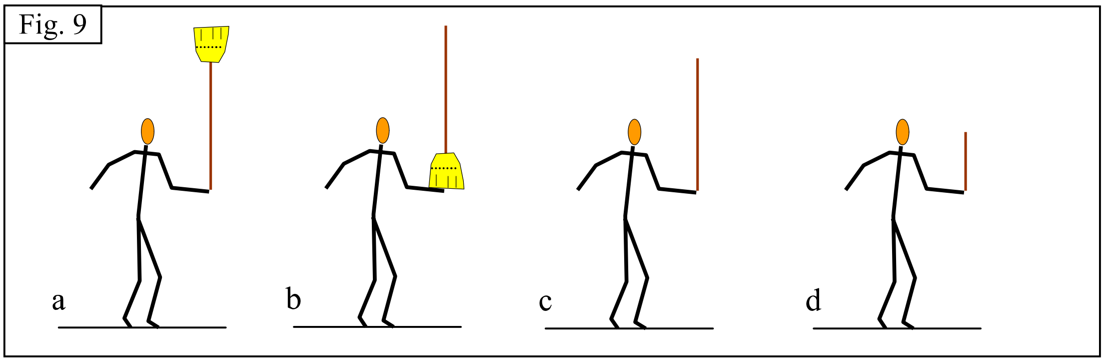


Fig. 8

Mientras más larga sea la varilla; es decir, a mayor l, mayor es su momento de inercia o, dicho de otro modo, mientras más alejada se encuentre la masa del eje de giro, mayor será el valor de I.

Esto tiene algunas aplicaciones que con seguridad ya conoces. Debes haber equilibrado, por ejemplo, una escoba con un dedo, como se ilustra en la figura 9a. ¿En cuál de los siguientes casos resulta más difícil mantener una varilla en equilibrio?

Fig. 9



Si tienes dudas debes hacer la prueba. Entre los casos *a* y *b*, es más fácil mantener el equilibrio de la escoba en el caso *a*. Entre los casos *c* y *d* es más fácil equilibrar la varilla más larga. Esto ocurre porque en relación al eje de giro (la mano de la persona) el momento de inercia es mayor en *a* que en *b* y mayor en *c* que en *d*. Por otra parte, en *a* es más fácil que en *c*, pues hay más masa lejos del eje de giro.

Otra situación en que un gran momento de inercia resulta de utilidad, es el caso del equilibrista en la cuerda floja (figura 10), quien sostiene entre sus manos una larga varilla.

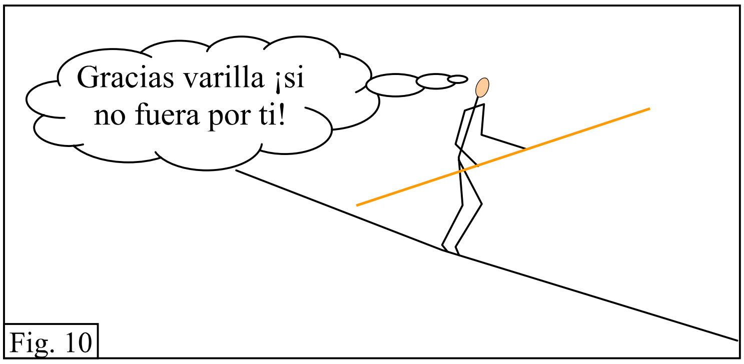


Fig. 10

Literalmente se está sujetando de ella, pues presenta un gran momento de inercia.

La figura 11 propone un experimento simple. Construye el sistema que se ilustra en dicha figura teniendo en cuenta que puedes colgar de una pitilla una varilla de madera para maquetas en la cual has enterrado un par de naranjas. ¿En cuál de los dos casos (*a* o *b*) el sistema posee un mayor momento de inercia?

En ambos casos la masa del sistema es la misma, pero ella está distribuida de distinta manera. En el caso *a* la masa está más alejada del eje de giro y por tanto allí el momento de inercia es mayor. Al aplicar en ambos casos un torque que saque del reposo el sistema, constataremos que en el caso *b* el sistema opone menos dificultad para rotar.

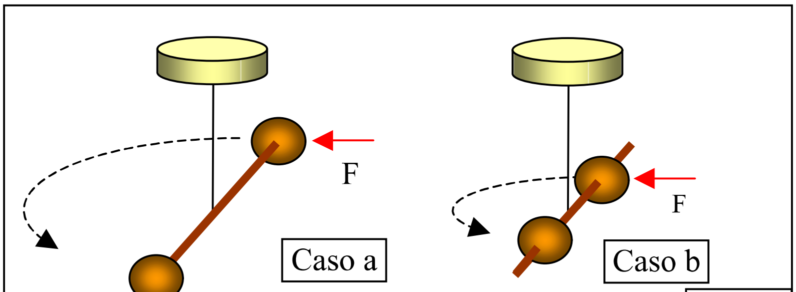
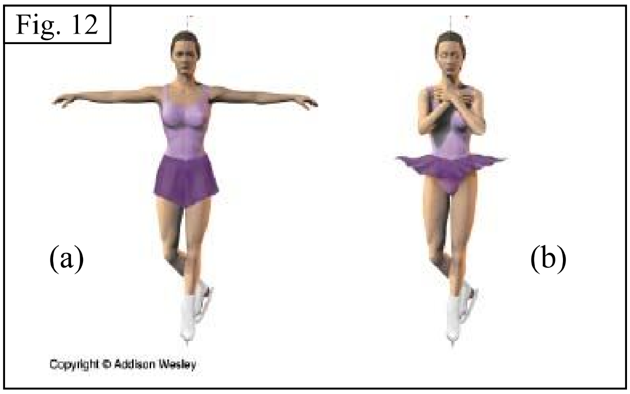


Fig. 11

4. Rotaciones y momento angular

Una cantidad física de gran importancia en las rotaciones es el *momento angular*, que se define como el producto entre el momento de inercia y la rapidez angular. Expresado con L, corresponde entonces a $L = I\omega$.

Su importancia radica en que es una cantidad que se conserva en los sistemas aislados; es decir, aquellos sobre los cuales el torque externo es nulo. Un caso bien conocido que pone en evidencia la tendencia a la conservación del momento angular es el de una bailarina que en la punta de sus pies hace girar su cuerpo en relación a un eje vertical (figura 12). Ella, si inicialmente gira con sus brazos extendidos (a), incrementa su rapidez angular cuando acerca los brazos a su cuerpo (b) y la disminuye cuando los aleja nuevamente de él. En este caso, como el roce entre la bailarina y el entorno es pequeño, durante una buena parte del movimiento se lo puede despreciar y se aprecia, por lo menos cualitativamente, la tendencia de L a conservarse. Debes notar que cuando la bailarina está con los brazos extendidos presenta un momento de inercia I mayor que cuando los junta a su cuerpo, de modo que $I\omega$ = constante.

Fig. 12


Una situación en la que se puede apreciar fácilmente la ley de conservación del momento angular en la sala de clases, es la que se ilustra en la figura 13. Si haces girar, a modo de boleadora, una goma de borrar por medio de un hilo que pasa por el tubito de un lápiz pasta, comprobarás que al tirar con fuerza el hilo la rapidez de la goma aumenta significativamente; es decir, aumenta ω como consecuencia de la reducción del radio de giro R, con lo cual disminuye el momento de inercia del sistema.

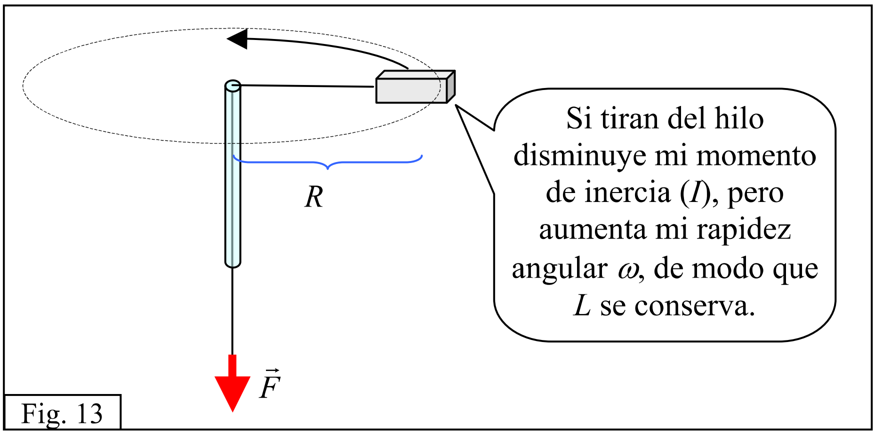
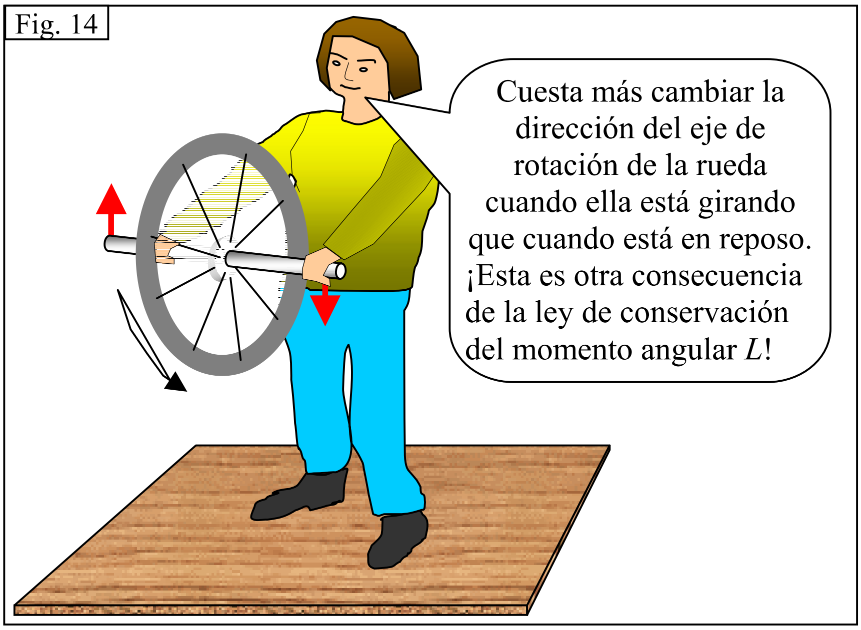


Fig. 13

Otro hecho importante de destacar es que el momento angular es una magnitud vectorial, porque la rapidez angular también lo es (esto se explica con mayor detalle un poco más adelante en este mismo texto, mediante la figura 26). Lo anterior implica que también tiende a conservarse la dirección espacial del eje de rotación.

Ello se pone en evidencia al intentar cambiar la dirección del eje de rotación de una rueda de bicicleta, como se ilustra en la figura 14. Resulta muy difícil cuando está girando en comparación a cuando está en reposo.

Fig. 14



Si haces la misma experiencia, pero estando sentado en una silla de secretaria que pueda girar, constatarás que al intentar cambiar la dirección del eje de la rueda de bicicleta, tú y la silla empezarán a girar. En efecto, el sistema complejo formado por la rueda de bicicleta y tu cuerpo con la silla giratoria tiende a conservarse para el conjunto.

Este es también el principio bajo el cual funciona el giroscopio, instrumento de gran importancia en la navegación aérea y espacial. Se trata de una rueda de gran momento de inercia que gira con una gran velocidad angular en un sistema de ejes que puede rotar libremente. El eje de giro de la rueda se mantiene entonces paralelo a sí mismo dando cuenta a los pilotos de la nave de los cambios que ella experimenta en su orientación.

5. Trabajo mecánico y energía

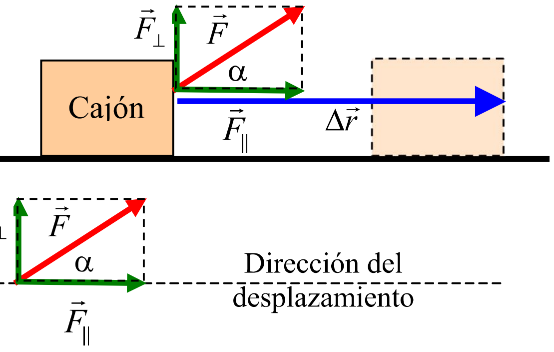
Otra cantidad que se conserva en el tiempo, tal vez la más importante de la física, es la energía mecánica. De ella algo aprendiste en 2° Año Medio.

Un sistema físico posee energía (por ejemplo un automóvil o una persona), debido a que posee capacidad para realizar trabajo mecánico. Es decir, hay energía cuando algo tiene la capacidad para aplicar sobre un objeto una fuerza capaz de desplazarlo.

Más exactamente, como lo ilustra la figura 15, el trabajo T que realiza una fuerza $\vec{F}$ corresponde al producto entre el componente de la fuerza que posee la dirección del desplazamiento $\vec{F}_{\parallel}$ y el desplazamiento $\Delta\vec{r}$; o sea $T = \left|\vec{F}_{\parallel}\right|\left|\Delta\vec{r}\right|$. Si

sabes algo de trigonometría comprenderás que el trabajo también puede ser expresado como $T = |\vec{F}||\Delta r|\cos(\alpha)$, en que α es el ángulo que forman $\vec{F}$ y $\Delta\vec{r}$.

Fig. 15



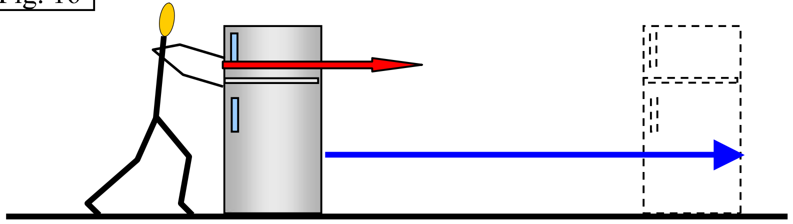
Es importante observar que T es:

- una magnitud escalar (o no vectorial) cuya unidad en el Sistema Internacional de unidades (SI) es el joule (newton×metro).
- cero cuando la fuerza es perpendicular al desplazamiento, pues cos(90º) = 0.
- $|\vec{F}||\Delta\vec{r}|$ cuando la fuerza posee la misma dirección y sentido del desplazamiento.
- $-|\vec{F}||\Delta\vec{r}|$ cuando la fuerza posee la misma dirección, pero sentido opuesto al del desplazamiento, como suele ocurrir con la fuerza de roce.

Veamos un ejemplo que ilustra estos aspectos. Supón que la persona de la figura 16 arrastra por el piso horizontal un refrigerador aplicándole una fuerza de 30 newton y que lo traslada una distancia de 5 metros con rapidez constante.

¿Qué trabajo realiza la fuerza que aplica la persona?

Fig. 16



Puesto que en este caso $\left|\vec{F}_{\parallel}\right| = \left|\vec{F}\right|$ = 30 newton ($\vec{F}_{\perp} = \vec{0}$, o bien cos(0º) = 1), $\left|\Delta\vec{r}\right|$ = 5 metros y los vectores $\vec{F}$ y $\Delta\vec{r}$ poseen la misma dirección y sentido, T = 150 joules.

¿Qué trabajo realiza en este caso la fuerza de gravedad que actúa sobre el refrigerador?

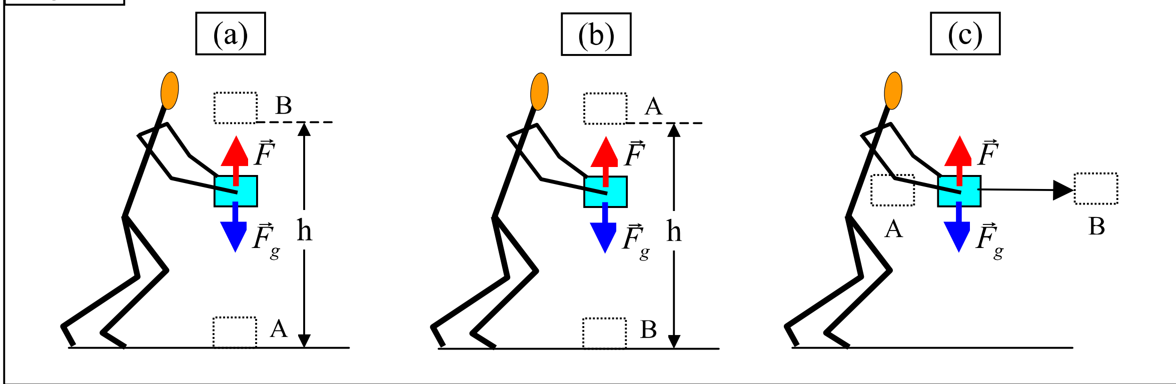
Puesto que el peso del refrigerador es perpendicular al desplazamiento, esta fuerza no realiza trabajo; $T = 0$.

¿Qué trabajo realiza la fuerza de roce que actúa sobre el refrigerador?

Como el movimiento del refrigerador es rectilíneo y uniforme, la fuerza neta o total sobre él es cero y, por lo tanto, la fuerza de roce debe ser de 30 newton. Además tiene sentido opuesto al del desplazamiento, razón por la cual el trabajo que ella realiza es $T = -$ 150 joules.

En muchas ocasiones nosotros levantamos o bajamos objetos desplazándolos a favor o en contra de la fuerza de gravedad. En algunos de estos casos hay trabajo y en otros no. Analicemos las situaciones que se ilustran en la figura 17.

Fig. 17



En los tres casos la persona mueve un objeto de masa m desde el punto A al B con movimiento uniforme, pero en (a) lo está subiendo, en (b) lo está bajando y en (c) lo está trasladando horizontalmente. Como el movimiento es uniforme, en los tres casos la fuerza neta sobre el cuerpo es cero, ya que las dos únicas fuerzas que actúan, la que aplica la persona ($\vec{F}$) y la gravedad ($\vec{F}_g = m\vec{g}$), se anulan entre sí.

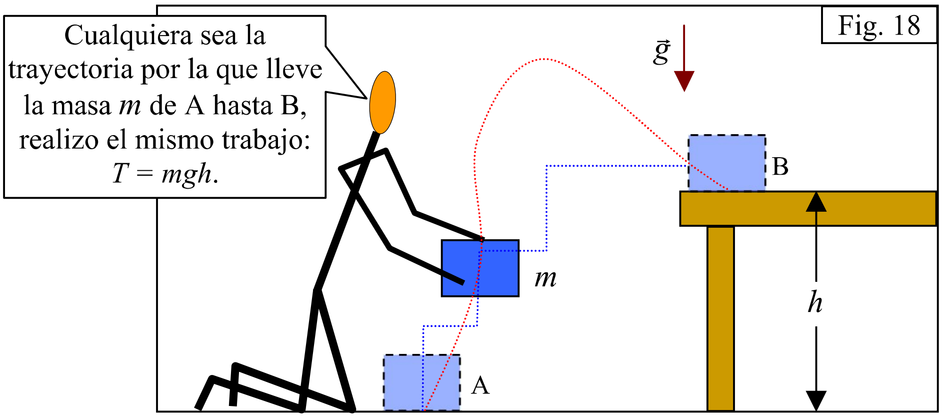
En consecuencia, en los tres casos el trabajo neto (el realizado por la fuerza neta) es cero.

En el caso (a) el trabajo que realiza la fuerza que aplica la persona es $T = mgh$, mientras que el trabajo que realiza la fuerza de gravedad es $T = -mgh$.

En el caso (b) el trabajo que realiza la persona es $T = -mgh$ y el que realiza la fuerza de gravedad es $T = mgh$.

Por último, en el caso (c), tanto el trabajo realizado por la fuerza que aplica la persona como el que realiza la fuerza de gravedad son cero, pues son perpendiculares a la dirección del desplazamiento.

En base a lo anterior es fácil demostrar que el trabajo que realizamos a favor o en contra de la fuerza de gravedad es independiente de la trayectoria por donde traslademos un objeto. Esta idea se ilustra en la figura 18.



Por último, es importante tener presente que en el movimiento circunferencial uniforme la fuerza centrípeta no realiza trabajo, pues es en todo instante perpendicular al desplazamiento.

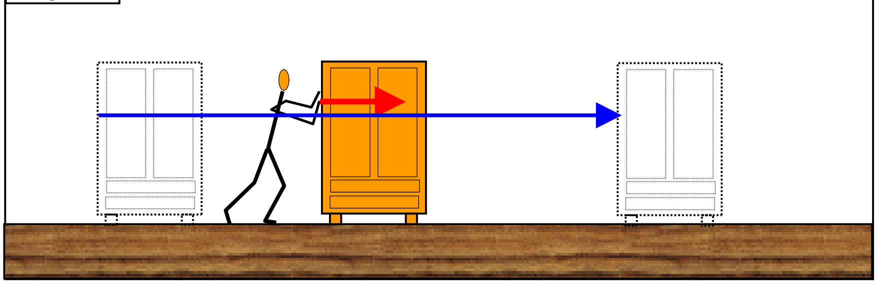
6. Potencia

Una fuerza puede realizar un mismo trabajo demorando tiempos distintos. De ello da cuenta el concepto de *potencia*, que habitualmente designamos con la letra W.

Si T es el trabajo realizado por una fuerza en el tiempo Δt, entonces la potencia desarrollada es $W = \frac{T}{\Delta t}$ y su unidad en el Sistema Internacional es el $\frac{\text{joule}}{\text{segundo}}$, que se denomina watt.

Veamos un ejemplo. Supongamos que la persona de la figura 19 aplica sobre un mueble una fuerza horizontal de 100 newton logrando desplazarlo una distancia de 10 metros en 50 segundos, ¿cuál es la potencia que desarrolla?

Fig. 19



El trabajo realizado por la persona es T = 1.000 joule y, como lo realiza en 50 s, la potencia desarrollada es W = 20 watt.

Si otra persona hiciera el mismo trabajo, pero demorando 25 s, desarrollaría una potencia de 40 watt.

Es interesante observar que la potencia también se puede calcular como $W = Fv$, en que v es la velocidad. En el caso anterior el mueble recorrió 10 m en 50 s, es decir, su rapidez fue 0,2 m/s. Como la fuerza fue de 100 newton, empleando esta nueva fórmula llegamos al mismo resultado.

Estudiemos un problema. Imagina que en el diseño de un rascacielos hay un ascensor de 500 kg que debe trasladar hasta 600 kg de carga (unas 10 personas) hasta una altura de 300 metros (unos 85 pisos). Si se desea que en un viaje expreso desde el primer y hasta el último piso el ascensor demore 4 minutos, ¿cuál debiera ser la mínima potencia del motor que mueva el ascensor?

La masa total que debe trasladarse es de 1.100 kg, por lo tanto, la fuerza que se le debe aplicar, igual al peso, debe ser de unos 11.000 newton (considerando g = 10 m/s^2). Como el desplazamiento que experimenta el ascensor es de 300 metros, el trabajo que debe realizar el motor es de 3.300.000 joule. Como el tiempo que debe demorar en realizar esta tarea es de 4 minutos = 240 s, la potencia del motor debiera ser de 13.750 watt.

7. La energía mecánica y su conservación

7.1. Energía cinética y potencial

Es fácil ver que el trabajo mecánico que realiza la fuerza de gravedad sobre una piedra de masa m que se suelta desde una altura h es, respecto del suelo, $T = mgh$ e igual a $T = \frac{1}{2}mv^2$ en que $v = |\vec{v}|$ es la rapidez con que llega al suelo. Como se ilustra en la figura 20, la piedra que cae posee los dos tipos de energía.

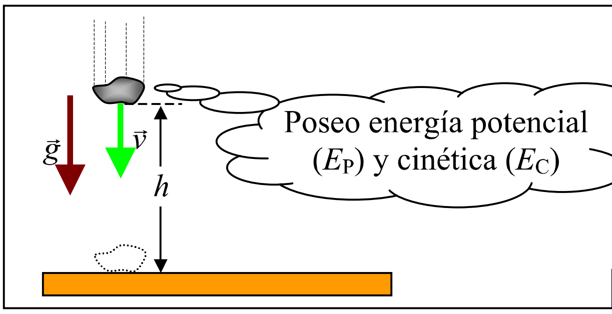


Fig. 20

La primera cantidad (la *energía potencial* o posicional) corresponde a la que posee un cuerpo debido a la posición que ocupa; la denominamos *energía potencial gravitatoria* y la podemos escribir como $E_P = mgh$. La segunda cantidad, que corresponde a la energía que posee un cuerpo por el hecho de estar trasladándose con cierta rapidez, la denominamos *energía cinética de traslación* y la podemos escribir como $E_{CT} = \frac{1}{2}mv^2$.

Si la piedra estuviera girando sobre sí misma en relación a un eje con una rapidez angular ω y un momento de inercia I, tendría también una *energía cinética de rotación*, que se puede calcular como $E_{CR} = \frac{1}{2}I\omega^2$. En los ejemplos que veremos a continuación consideraremos situaciones en que los cuerpos no rotan sobre sí. El caso de la energía de rotación lo trataremos en forma especial más adelante en este mismo módulo.

Si durante la caída de un objeto este no experimenta roce con el aire (o bien dicho roce pueda ser despreciado), como ocurre en muchas situaciones cotidianas, la energía mecánica total $E = E_P + E_C$ permanece constante en el tiempo. Por eso hablamos de la ley de *conservación de la energía mecánica*.

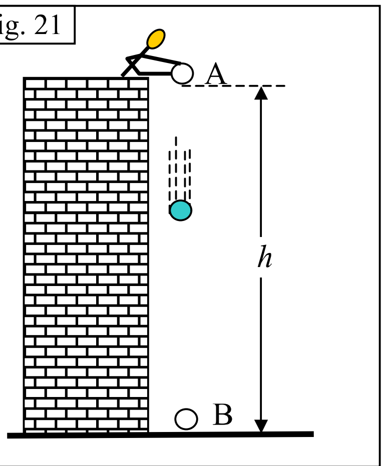
Esta ley no es aplicable solo a la caída de los cuerpos. Es en realidad completamente general y constituye un sólido pilar de la física. Por otra parte resulta de gran utilidad práctica para resolver en forma simple algunos complejos problemas, permitiendo predecir situaciones de movimiento.

Un caso particularmente interesante en que se puede aplicar la ley de conservación de la energía mecánica, es el de un carrito que viaja por una montaña rusa cuando el roce puede ser despreciado.

Veamos un par de ejemplos que ilustran la manera de emplear esta ley.

Ejemplo 1. Una pelota se deja caer libremente en condiciones de vacío desde lo alto de una torre de 20 metros de altura, como se indica en la figura 21. ¿Con qué rapidez llega al suelo?

Fig. 21



Sea A el punto del cual se suelta la pelota y B el punto donde llega a impactar el suelo.

Si m es la masa de la pelota, h la altura respecto del suelo desde donde es soltada y g la aceleración de gravedad del lugar, entonces, la energía mecánica total de la pelota en A, respecto del suelo, debe ser $E_A = mgh$, y en B, $E_B = \frac{1}{2}mv^2$, en que v es la rapidez con que llega al suelo. En A su energía cinética es cero debido a que parte del reposo y en B la energía potencial es cero porque $h = 0$.

Ahora bien, como las condiciones son de vacío, no hay roce y, por lo tanto, la energía mecánica de la pelota en A y en B deben ser iguales; es decir

$$E_B = E_A, \text{ por lo tanto: } \frac{1}{2}mv^2 = mgh$$

Despejando encontramos que $v = \sqrt{2gh}$. Como $h = 20$ metros, si consideramos g = 10 m/s^2 tendremos que v = 20 m/s.

Nota que la masa de la pelota se simplifica y por lo tanto no es un dato relevante en el problema; en otras palabras, la ley de conservación de la energía ratifica el hecho de que, en condiciones de vacío, todos los cuerpos caen de la misma manera independientemente de la masa que posean.

Ejemplo 2. Un carrito se suelta desde lo alto de una montaña rusa de 30 m de altura, como se muestra en la figura 22. Si despreciamos los efectos del roce y el giro de las ruedas,

a) ¿con qué rapidez pasa el carrito por el punto P, situado a 18 m del suelo?

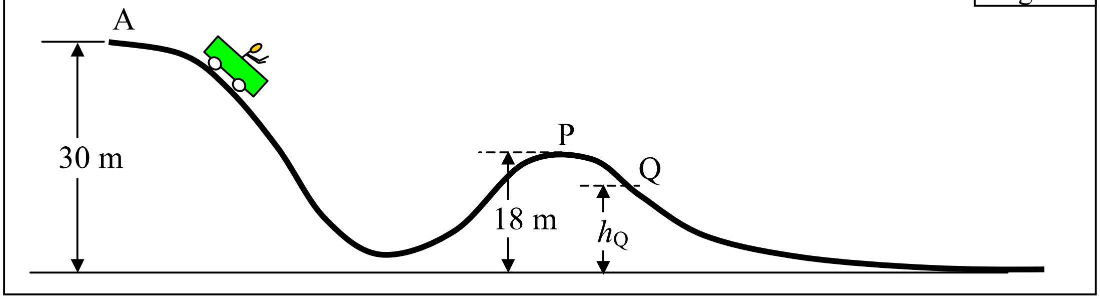


Fig. 22

Si m es la masa del carrito y g la aceleración de gravedad en el lugar, la energía mecánica total del carrito en el punto A es, respecto del suelo, $E_A = mgh$ y, en el punto P, $E_P = mgh_P + \frac{1}{2}mv^2$, en que h_P es la altura a que se encuentra P y v la rapidez con que el carrito pasa por él. Como los efectos de roce son despreciables, entonces la energía mecánica en P y en A debe ser igual; es decir: $E_P = E_A$, o sea, $mgh_P + \frac{1}{2}mv^2 = mgh$. Despejando v encontramos: $v = \sqrt{2g(h - h_P)}$. Si g = 10 m/s^2, como h = 30 m y h_P = 18 m, tenemos que $v = \sqrt{240} \approx 15{,}5$ m/s.

b) Si el carrito pasa por el punto Q con una rapidez de 17 m/s, ¿a qué altura se encuentra este punto Q?

La energía del carrito en el punto Q debe ser $E_Q = mgh_Q + \frac{1}{2}mv_Q^2$ e igual a la que posee en el punto A: E_A = mgh; es decir: $mgh_Q + \frac{1}{2}mv_Q^2 = mgh$. Despejando obtenemos $h_Q = h - \frac{1}{2g}v_Q^2$. Reemplazando los datos de que disponemos encontramos que h_Q = 15,55 metros.

7.2. Energía cinética de rotaciones

Si un objeto, como por ejemplo una rueda, está girando en relación a un eje, entonces por ese solo hecho posee energía cinética aunque no se esté desplazando. Si I es su momento de inercia y ω su rapidez angular, entonces esta energía, que denominaremos energía cinética de rotación, como se dijo antes, queda expresada por $E_{CR} = \frac{1}{2} I\omega^2$.

Hay situaciones en que los objetos se trasladan y rotan a la vez. En estos casos, a lo que vimos en el punto anterior es necesario agregar la expresión de E_{CR}, quedando la ley de conservación de la energía mecánica como:

$$\frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} I\omega^2 + mgh = \text{constante}$$

Un caso en que es necesario considerar la energía cinética de rotación al aplicar la ley de conservación de la energía mecánica es el de una bolita o rueda que gira a medida que desciende por un plano inclinado, como se sugiere en la figura 23.

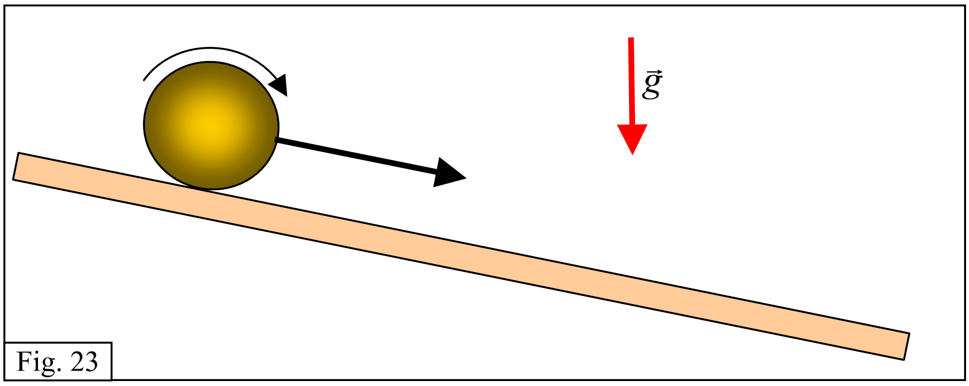


Fig. 23

Para comprender mejor esta idea, analicemos la situación en forma cualitativa.

Supongamos que la esfera de la figura 23 está inicialmente en reposo y se la suelta de modo que descienda por el plano inclinado. Aquí pueden suceder dos cosas: que la bolita se deslice sin rodar (por ejemplo, si el roce entre las superficies es nulo o despreciable) o que la bolita empiece a rodar (por ejemplo si el roce entre las superficies es significativo). En cualquiera de los dos casos la bolita llegará con cierta rapidez v al final del plano inclinado. Entonces, ¿cómo será la rapidez de la bolita en cada uno de estos casos?

Si la bolita empieza a girar irá adquiriendo una rapidez angular cada vez mayor y, por lo tanto, adquirirá una energía cinética rotacional $E_{CR} = \frac{1}{2} I\omega^2$, que también irá aumentando.

Como la variación de energía potencial en ambos casos es la misma, necesariamente al final del recorrido su energía cinética, debido a su traslación $\frac{1}{2} mv^2$, debe ser menor en el segundo caso y, por lo tanto, la bolita que rueda debe llegar al final del plano inclinado con una rapidez menor a la experimentada por la que se desliza sin rodar.

8. Traslaciones versus rotaciones

Como hemos visto, existe un conjunto de conceptos y leyes que dan cuenta de las traslaciones y otros que dan cuenta de las rotaciones o giros. Si bien son muy diferentes, es posible establecer entre ellos algunas analogías que facilitan su comprensión. A continuación presentamos un resumen de tales conceptos y leyes, poniendo la atención en las traslaciones, en las rotaciones y en las relaciones y diferencias que existen entre unos y otros.

8.1. Posición

Para un objeto que se traslada en el plano XY su posición ($\vec{r}$) respecto de un punto O, queda definida por el vector que se muestra en la figura 24a, que cambiará en cada instante de t. Análogamente, para un cuerpo que rota en relación a un punto P del plano XY, se define la posición angular α, que es el ángulo que forma con el eje X, como se indica en la figura 24b.

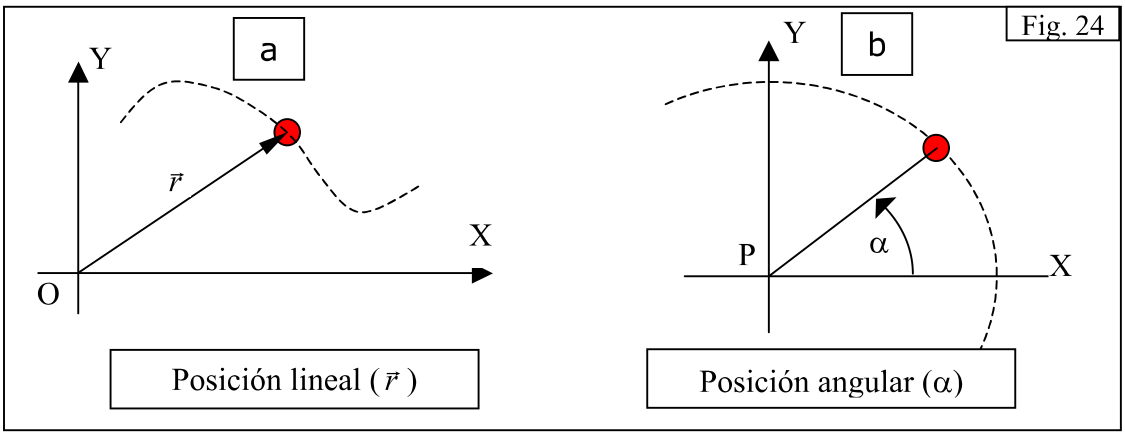
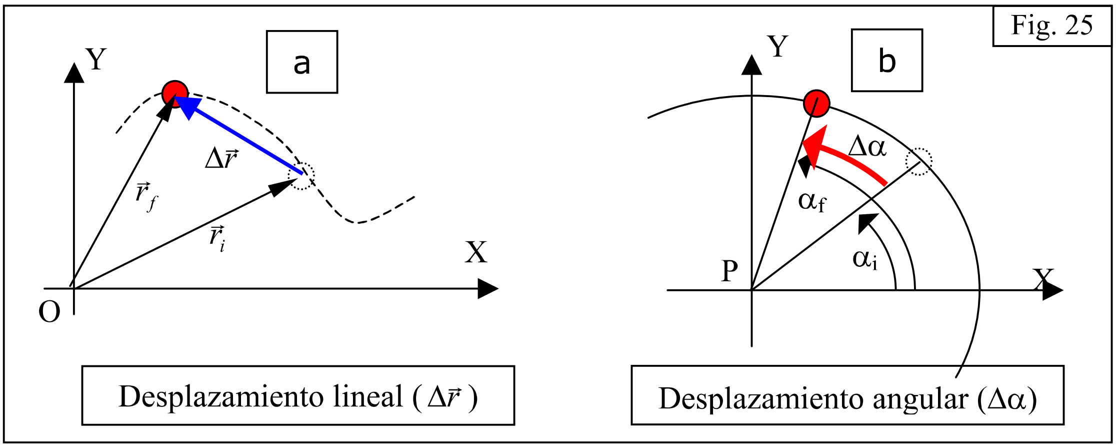


Fig. 24

8.2. Desplazamiento

Para un objeto que se traslada en el plano XY se ha definido el desplazamiento $\Delta\vec{r} = \vec{r}_f - \vec{r}_i$. Análogamente, un cuerpo que rota describirá cierto desplazamiento angular $\Delta\alpha = \alpha_f - \alpha_i$, según se ilustra en la figura 25 a y b respectivamente.

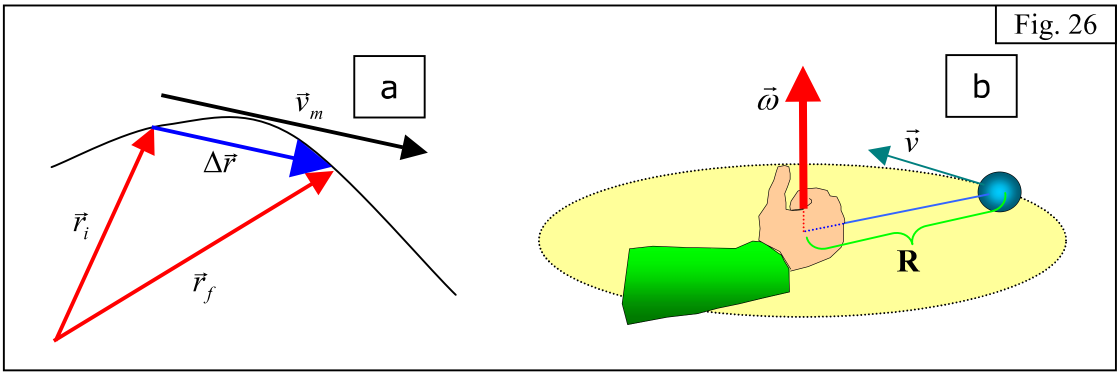
Fig. 25



8.3. Velocidad media

Como recordarás, la velocidad lineal es un concepto vectorial. Ella posee la dirección y sentido del desplazamiento $\Delta\vec{r}$, como se ilustra en la figura 26a, pues se define según $\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$. Análogamente, la velocidad angular también es un vector, que designamos por $\vec{\omega}$, en que su dirección es perpendicular al plano en que se realiza el movimiento, su sentido está dado por la regla de la mano derecha y su módulo está dado por $\omega_m = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t}$, según se ilustra en la figura 26b.

Fig. 26



8.4. Velocidad instantánea

La velocidad lineal instantánea $\vec{v}$ es la que posee un cuerpo en un instante t específico y corresponde a la razón $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ cuando $t \in \Delta t$ y Δt tiende a cero; es decir $\vec{v} = \lim\limits_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right)$. Siguiendo la misma analogía se define la velocidad angular instantánea $\vec{\omega}$.

8.5. Rapidez

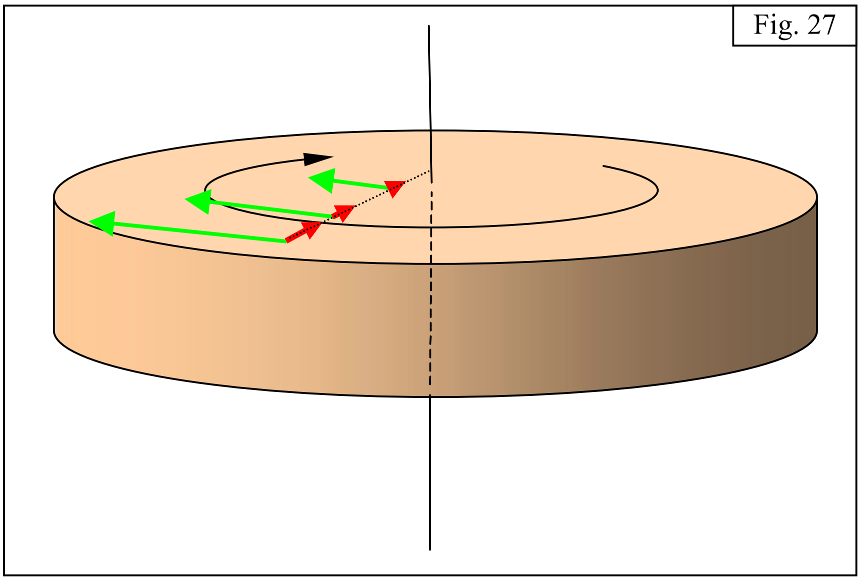
La rapidez lineal corresponde al módulo de la velocidad lineal, que expresamos entre barras o bien sin la flecha arriba; es decir, $v = |\vec{v}|$. Análogamente, la rapidez angular será $\omega = |\vec{\omega}|$. Esto es así tanto para los valores medios como instantáneos.

Cuando la rapidez de un cuerpo (lineal o angular) es constante, decimos que dicho movimiento es *uniforme*. En adelante nos ocuparemos solo de los casos en que la rapidez angular es constante, como es el del movimiento circular uniforme.

En esta situación se pueden ver algunas relaciones simples. Por ejemplo, para el movimiento circunferencial uniforme se cumple que $v = \frac{2\pi R}{T}$, en que R es el radio de la circunferencia y T su período de traslación y, por otra parte, se cumple que $\omega = \frac{2\pi}{T}$, en que el ángulo está expresado en radianes. Claramente se ve entonces que $v = \omega R$.

Es importante notar que para un disco sólido que rota como se ilustra en la figura 27, mientras todos los puntos que lo constituyen poseen la misma rapidez angular ω, poseen distinta rapidez lineal (flechas verdes), la cual es mayor mientras más alejados estén del eje de rotación. Lo mismo ocurre con la aceleración centrípeta (flechas rojas), que es mayor mientras más alejados estemos del eje de rotación.

Fig. 27



8.6. Aceleración

Igual que en los casos anteriores, es posible hablar de aceleración lineal y de aceleración angular. La aceleración lineal da cuenta de los cambios en la velocidad lineal y se define como $\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$. Análogamente, la aceleración angular da cuenta de los cambios en la velocidad angular y, no obstante poseer una definición que alumnas y alumnos fácilmente imaginarán, no la estudiaremos aquí por no ser necesaria.

Para el caso del movimiento circular uniforme, la aceleración angular es nula, pero la aceleración lineal está dirigida hacia el centro de rotación, razón por la cual se denomina aceleración centrípeta ($\vec{a}_C$) y su módulo es $a_C = \frac{v^2}{R}$ o bien $a_C = \omega^2 R$.

8.7. Masa y momento de inercia

La masa (m) de un cuerpo es la medida de su inercia. En otras palabras, la masa expresa la dificultad que los objetos presentan para cambiar su estado de reposo o movimiento. Por ejemplo, entre dos objetos poseerá mayor masa aquel que nos cueste más acelerar, frenar o cambiar la dirección en que se está moviendo.

El concepto análogo aquí es el de *momento de inercia* (I), que expresa la dificultad que ofrece un cuerpo para rotar alrededor de un eje. Como hemos visto, es un poco más complejo que el de masa, pues depende tanto del eje en relación al cual se lo haga girar como de la manera en que se distribuye su masa en relación a ese eje de rotación o giro.

Por ejemplo, si dos ruedas poseen la misma masa, poseerá mayor momento de inercia aquella cuyo radio sea mayor. Mientras más alejada esté la masa del eje de giro o rotación en un cuerpo, mayor será su momento de inercia. Por esta razón, como vimos, la bailarina que rota sobre sí misma tiene mayor momento de inercia cuando está con sus brazos extendidos que cuando los tiene junto a su cuerpo.

8.8. Fuerza y torque

Si la fuerza neta sobre una masa m es $\vec{F}$, producirá en ella una aceleración $\vec{a}$ tal que $\vec{F} = m\vec{a}$, como lo establece el segundo principio de Newton. Si sobre m no actúan fuerzas, entonces el cuerpo en cuestión conservará su estado de reposo o movimiento. Es decir, si está en reposo, continuará en reposo y, si está en movimiento, continuará moviéndose con rapidez constante y en línea recta. Todo esto, claro está, se refiere a las traslaciones.

El concepto análogo para las rotaciones es el de *torque* (τ). Si el torque neto sobre un sistema es cero, entonces dicho sistema conservará su estado de rotación. Es decir, si está en reposo, continuará en reposo, y si está rotando, conservará su movimiento rotacional en dos aspectos: su rapidez angular, que será constante, y la dirección del eje de rotación.

Recuerda que el torque, cuando la fuerza F es perpendicular al brazo r, está dado por: $\tau = Fr$.

8.9. Momentum lineal y momento angular

Como recordarás de Segundo Año Medio, una cantidad física importante es la cantidad de movimiento o *momentum lineal*. El momentum de un cuerpo se define como el producto de su masa por su velocidad. El concepto fue tratado cuando no sabías de vectores, pero ahora comprenderás que se trata de una magnitud vectorial. En efecto, queda bien definido como: $\vec{p} = m\vec{v}$.

Para el caso de las rotaciones también hay un concepto análogo, que es el de *momento angular* ($\vec{L}$) y que corresponde al producto entre el momento de inercia (I) y la velocidad angular ($\vec{\omega}$); es decir, corresponde a una magnitud vectorial que se puede expresar como $\vec{L} = I\vec{\omega}$, cuya dirección y sentido son las de $\vec{\omega}$.

Ahora bien, ambas cantidades ($\vec{p}$ y $\vec{L}$) están asociadas a leyes de conservación: la primera a la ley de conservación del momentum lineal y la segunda a la ley de conservación del momento angular.

La ley de conservación del momentum lineal establece que, para un sistema formado por uno o varios cuerpos, su momentum lineal total permanece constante en el tiempo si sobre dicho sistema no actúan fuerzas externas. Cuando esto ocurre decimos que el sistema está aislado.

Si un sistema físico aislado está formado por n cuerpos, entonces su momentum total es $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \ldots + \vec{p}_n$. Los cuerpos que constituyen este sistema, pueden interactuar entre sí como los carritos o bolitas que chocan, pero, si sobre ellas no actúan fuerzas externas, entonces $\vec{P} = \text{constante}$.

La ley de conservación del momento angular establece que para un sistema formado por uno o más cuerpos en rotación, su momento angular total permanece constante en el tiempo si sobre el sistema no hay un torque neto externo; es decir, el sistema también debe estar aislado.

Si un sistema de n cuerpos rota en torno a ciertos ejes (iguales o distintos), entonces el momento angular del conjunto será $\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \ldots\vec{L}_n$. Los cuerpos en este sistema pueden interactuar entre sí, como el caso de la rueda de bicicleta y la persona en la silla de secretaria, pero si no hay torque externo, entonces, $\vec{L} = \text{constante}$.

8.10. Energía cinética

Por último, mencionemos la evidente analogía que existe entre la energía cinética de traslación y la energía cinética de rotaciones. Basta en este caso repetir las expresiones que permiten calcularlas para ver su parecido.

Energía cinética de traslación: $E_{CT} = \frac{1}{2}mv^2$

Energía cinética de rotaciones: $E_{CR} = \frac{1}{2}I\omega^2$

¿Tienen la misma unidad? Verifícalo.