GUÍA CONTROL 1 – FÍSICA MECÁNICA

VECTORES

Pregunta 1
Dados dos vectores $\vec{A} = -2.00\hat{\imath} + 3.00\hat{\jmath} + 4.00\hat{k}$ y $\vec{B} = 3.00\hat{\imath} + 1.00\hat{\jmath} - 3.00\hat{k}$

a) Obtenga la magnitud de cada vector
b) Escriba una expresión para $\vec{A} - \vec{B}$ empleando vectores unitarios
c) Obtenga la magnitud de la diferencia anterior. ¿Es igual que la magnitud de $\vec{B} - \vec{A}$?. Explique.

Solución:

a) $$A = \sqrt{(2.00)^2 + (3.00)^2 + (4.00)^2} = 5.39.$$

$$B = \sqrt{(3.00)^2 + (1.00)^2 + (3.00)^2} = 4.36.$$

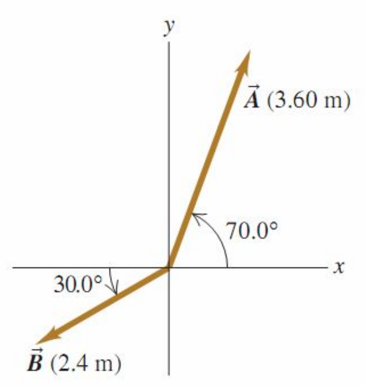
b) $$\begin{aligned}\vec{A} - \vec{B} &= (A_x - B_x)\hat{\imath} + (A_y - B_y)\hat{\jmath} + (A_z - B_z)\hat{k} \\ &= (-5.00)\hat{\imath} + (2.00)\hat{\jmath} + (7.00)\hat{k}\end{aligned}$$

c) $$\sqrt{(5.00)^2 + (2.00)^2 + (7.00)^2} = 8.83,$$

8,83 será también la magnitud de $\vec{B} - \vec{A}$

Pregunta 2
Para los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ de la figura:

a) Exprese los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ en términos de i y j
b) Obtenga el producto escalar $\vec{A} \cdot \vec{B}$
c) Obtenga la magnitud y dirección del producto vectorial $\vec{A} \times \vec{B}$



Solución:

a) $$\vec{A} = (3.60\,\text{m})\cos 70.0°\,\hat{i} + (3.60\,\text{m})\sin 70.0°\,\hat{j} = (1.23\,\text{m})\hat{i} + (3.38\,\text{m})\hat{j}$$

$$\vec{B} = -(2.40\,\text{m})\cos 30.0°\,\hat{i} - (2.40\,\text{m})\sin 30.0°\,\hat{j} = (-2.08\,\text{m})\hat{i} + (-1.20\,\text{m})\hat{j}$$

b) El ángulo entre los vectores A y B es 210º - 70º = 140º. El producto punto será.

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (3.60\,\text{m})(2.40\,\text{m})\cos 140° = -6.62\,\text{m}^2$$

Otra forma de calcularlo es multiplicando entre sí las proyecciones de cada vector:

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot \vec{B} &= A_x B_x + A_y B_y \\ &= (3.60\,\text{m})\cos 70°(2.4\,\text{m})\cos 210° + (3.6\,\text{m})\sin 70°(2.4\,\text{m})\sin 210° \\ &= -6.62\,\text{m}^2 \end{aligned}$$

c) La magnitud del producto cruz será:

$$(3.60\,\text{m})(2.40\,\text{m})\sin 140° = 5.55\,\text{m}^2,$$

La dirección será en el eje Z, saliendo del plano X-Y. Esto se obtiene según la regla de la mano derecha. Luego, el resultado será:

$$\vec{A} \times \vec{B} = 5{,}55\ \hat{k}$$

CINEMÁTICA

Pregunta 1

Un automóvil recorre una recta con velocidad constante. En los instantes t_0 = 0 s y t_1 = 4 s, sus posiciones son x_0 = 9,5 m y x_1 = 25,5 m. Determinar:

a) Velocidad del automóvil.

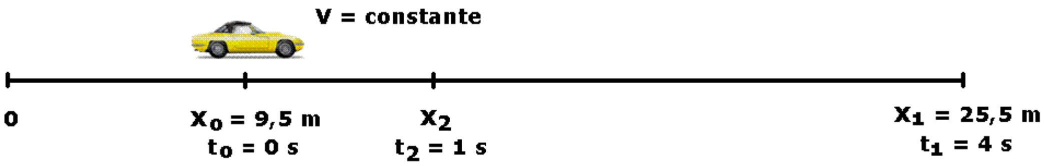
b) Su posición x_2 en t_2 = 1 s.

c) Las ecuaciones de movimiento.

d) Los gráficos x = x(t) y v = v(t) del automóvil.

Solución:

Datos:
t_0 = 0 s
x_0 = 9,5 m
t_1 = 4 s
x_1 = 25,5 m



a) Como:

$v = \Delta x/\Delta t = (x_2 - x_1)/(t_2 - t_1)$

v = (25,5 m - 9,5 m)/(4 s - 0 s) = (16 m) / (4 s)

v = 4 m/s

b) Para t_2 = 1 s:

$x_2 = x_0 + v.\ t_2$
x_2 = 9,5 m + 4m/s . 1 s = 9,5 m + 4 m
x_2 = 13,5 m

c)

$x = x_0 + v.\ t$

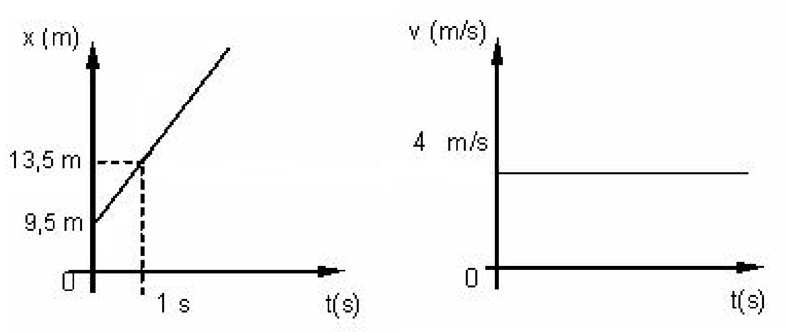
x = 9,5 m + 4 (m/s).t

d) Tenemos que:

t_0 = 0 s

x_0 = 9,5 cm

v_0 = 4 m/s (v es siempre la misma, v_0 =v)



La pendiente de la recta x/t es 4 m/s, que es igual a la velocidad.

Pregunta 2

Un OVNI viaja en línea recta con una velocidad media de 1.200 m/s durante 9 s, y luego con velocidad media de 480 m/s durante 7 s, siendo ambas velocidades en una misma dirección pero en distinto sentido:

a) ¿Cuál es el desplazamiento total, en el viaje de 16 s?.

b) ¿Cuál es la velocidad media del viaje completo?.

Solución:

a) El desplazamiento no es más que la posición final menos la posición inicial, no importa la trayectoria del objeto. Tenemos los siguientes datos:

t_0 = 0 s
x_0 = 0 m
v_0 = 1.200 m/s
t_1 = 9 s
v_1 = - 480 m/s
t_2 = 16 s
Δt_{1-2} = 7 s

Usando las ecuaciones de movimiento:

$x_1 = x_0 + v_0 t_1$

x_1 = 0 + 1.200 m/s x 9 s

$x_1 = 10.800$ m

$x_2 = x_1 + v_1 \times \Delta t_{1-2}$
$x_2 = 10.800 + (-480 \text{ m/s}) \times 7 \text{ s}$
$x_2 = 10.800 - 3.360$
$x_2 = 7.440$ m O sea, el desplazamiento total fueron 7.440 m desde el origen

b) La velocidad media del viaje es igual al desplazamiento total dividido por el tiempo total, es decir:

$V_{media} = \Delta x/\Delta t = (x_2 - x_0)/(t_2 - t_0) = (7.440 - 0)/(16 - 0)$
$V_{media} = 7.440/16$
$V_{media} = 465$ m/s

También se puede calcular como el promedio ponderado de las velocidades según el tiempo:

$V_{media} = (1.200 \text{x} 9 + (-480) \text{x} 7)/16 = (10.800 - 3.360)/16 = 7.440/16$
$V_{media} = 465$ m/s (da exactamente lo mismo)

No confundir con la rapidez media, porque no incluye el signo, es decir, no toma en cuenta la dirección ni el sentido.

PROYECTILES

Pregunta 1

Se lanza un proyectil desde un cañón con una velocidad inicial de 200 m/s y una inclinación, sobre la horizontal, de 30°. Suponiendo despreciable la pérdida de velocidad con el aire, calcular:

a) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la bala?.

b) ¿A qué distancia del lanzamiento alcanza la altura máxima?.

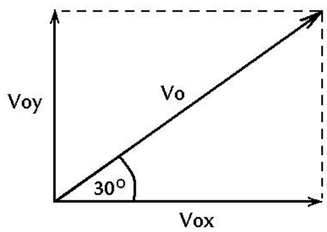
c) ¿A qué distancia del lanzamiento cae el proyectil?.

Las ecuaciones de movimiento son:
(1) $X = X_0 + V_{0X} \times t$ ($a_{0X} = 0$)
(2) $Y = Y_0 + V_{0Y} \times t - (g \times t^2)/2$
(3) $V_X = V_{0X}$
(4) $V_Y = V_{0Y} - g \times t$

Solución:

a) Datos: $X_0 = 0$; $Y_0 = 0$; $\theta = 30º$

Descomponemos la velocidad inicial V_0 en los ejes X e Y:



$V_{0X} = V_0 \cos 30º = 200 \times 0,87$
$V_{0Y} = V_0 \text{ sen } 30º = 200 \times 0,5$
$V_{0X} = 174$ m/s
$V_{0Y} = 100$ m/s

En el instante t_* en que se alcanza la altura máxima, $V_Y = 0$. Reemplazamos en (4):

$0 = 100 - 10 \times t_*$
$10 \times t_* = 100$
$t_* = 10$ s

Luego, reemplazamos t_* en (2).

$Y_{máx} = 0 + 100 \times 10 - (10 \times 10^2)/2 = 1.000 - 1.000/2$

$Y_{máx} = 500$ m

b) Sabemos que alcanza la altura máxima en $t_* = 10$ s, por lo que reemplazamos en (1):

$X = 0 + 174 \times 10$
$X = 1.740$ m

c) Sabemos que en el instante en que alcanza la altura máxima, ha recorrido la mitad de su trayectoria:

$X_{máx} = 2 \times 1.740$

$X_{máx} = 3.480$ m

Pregunta 2

Una pelota esta rodando con velocidad constante sobre una mesa de 2 m de altura, a los 0,5 s de haberse caído de la mesa está a 0,2 m bajo ella. Calcular:

a) ¿Qué velocidad traía?.

b) ¿A qué distancia de la mesa estará al llegar al suelo?.

c) ¿Cuál era su distancia al suelo a los 0,5 s?.

Se recuerda que en tiro parabólico y tiro oblicuo el movimiento en el eje "x" es rectilíneo uniforme, mientras en el eje "y" es uniformemente variado (asociar con tiro vertical y caída libre).

Datos:

$v_{0y} = 0$ m/s

h = 2 m

t = 0,5 s

d = 0,2 m

g = 10 m/s ²

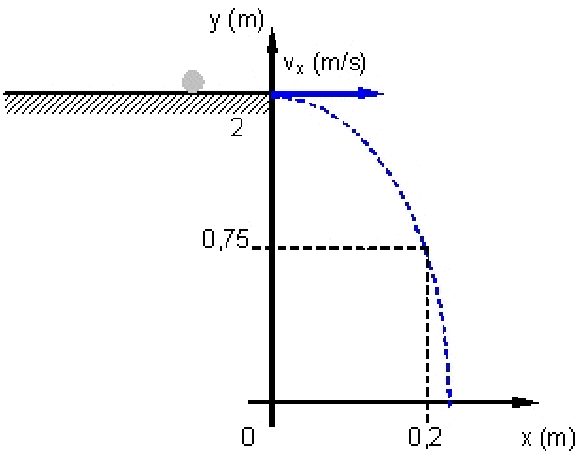
Ecuaciones:

(1) $v_{fy} = v_{0y} + g.t$

(2) $h = v_{0y}.t + g.t^2/2$

(3) $v_x = \Delta x/\Delta t$

El gráfico es:



Solución:

a) De la ecuación (3):

$v_x = (0,2 \text{ m})/(0,5 \text{ s})$

$v_x = 0,4$ m/s

b) De la ecuación (2) hallamos el tiempo que tarda en caer:

$h = g.t^2/2$

$t = \sqrt{2.h/g}$

Reemplazamos en la ecuación (3): $x = t.v_x \Rightarrow x = \sqrt{\frac{2.h}{g}}.v_x \Rightarrow x = \sqrt{\frac{2.2\,m}{10\,\frac{m}{s^2}}}.0{,}4\,\frac{m}{s}$

x = 0,253 m

c) Aplicando la ecuación (2) obtenemos la distancia recorrida:

$h = g.t^2/2$

$h = (10\ m/s^2).(0{,}5\ s)^2/2$

h = 1,25 m

Por lo tanto estará a 0,75 m del suelo.

Pregunta 3

Un proyectil es disparado desde un acantilado de 20 m de altura en dirección paralela al río, éste hace impacto en el agua a 2.000 m del lugar del disparo. Determinar:

a) ¿Qué velocidad inicial tenía el proyectil?.

b) ¿Cuánto tardó en tocar el agua?.

Se recuerda que en tiro parabólico y tiro oblicuo el movimiento en el eje "x" es rectilíneo uniforme, mientras en el eje "y" es uniformemente variado (asociar con tiro vertical y caída libre). Esto quiere decir que la velocidad en el eje x es constante y en el eje y es variable.

Datos:

$v_{0y} = 0$ m/s

h = 20 m

d = 2.000 m

$g = 10\ m/s^2$

Solución:

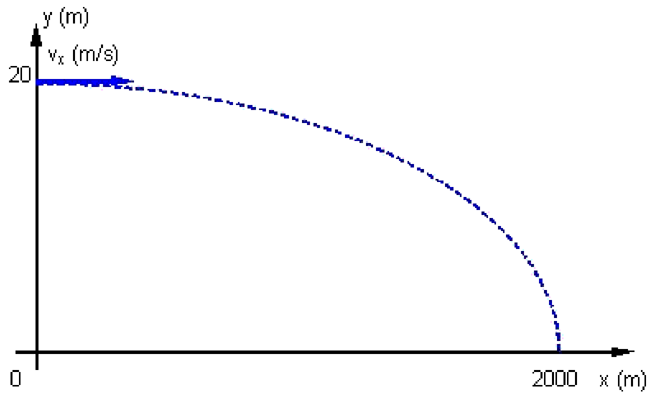
Ecuaciones:

(1) $v_y = v_{0y} + g.t$

(2) $h = v_{0y}.t + g.t^2/2$

(3) $v_x = \Delta x/\Delta t$

El gráfico es:



a) De la ecuación (3) despejamos el tiempo:
$t = x/v_x$ (4)
y reemplazamos la (4) en la (2):

$$h = \frac{1}{2}.g.t^2 \Rightarrow h = \frac{1}{2}.g.\left(\frac{x}{v_x}\right)^2$$

$$h = \frac{1}{2}.g.\frac{x^2}{{v_x}^2} \Rightarrow {v_x}^2 = \frac{1}{2}.g.\frac{x^2}{h} \Rightarrow v_x = \sqrt{\frac{1}{2}.g.\frac{x^2}{h}}$$

$$v_x = \sqrt{\frac{1}{2}.10\frac{m}{s^2}.\frac{(2000\,m)^2}{20m}}$$

$v_x = 1.000$ m/s (constante)

b) De la ecuación (4):
$t = x/v_x$
$t = (2000 \text{ m})/(1000 \text{ m/s})$
$t = 2$ s

Pregunta 4

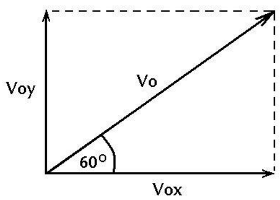
Se dispone de una catapulta que forma un ángulo de 60° con la horizontal. El objetivo se encuentra en lo alto de una torre de 26 m de altura y a 200 m de la catapulta. Determinar:

a) ¿Con qué velocidad debe salir el proyectil?.

Solución:

a) Datos: $X_0 = 0$; $Y_0 = 0$; $\theta = 60º$

Descomponemos la velocidad inicial:



$V_{0X} = V_0 \cos 60º = V_0 \times 0,5$
$V_{0Y} = V_0 \text{ sen } 60º = V_0 \times 0,87$

En el instante t_{Torre} en que el proyectil llega a la torre, ha recorrido una distancia X = 200 m y está a una altura Y = 26 m. Usamos las ecuaciones (1) y (2) dadas en la pregunta 1:

(5) $X = 200 \text{ m} = 0 + 0,5 \times V_0 \times t_{Torre}$
(6) $Y = 26 \text{ m} = 0 + 0,87 \times V_0 \times t_{Torre} - 5 \times {t_{Torre}}^2$

De (5):
$V_0 \times t_{Torre} = 200/0,5 = 400$
(7) $V_0 \times t_{Torre} = 400$
$t_{Torre} = 400/V_0$ Reemplazamos en (6):

$26 = 0{,}87 \times V_0 \cancel{\times} 400/V_0 - \cancel{5} \times t_{Torre}^2 = 0{,}87 \times 400 - 5 \times t_{Torre}^2$
$26 = 348 - 5 \times t_{Torre}^2$
$5 \times t_{Torre}^2 = 322$

$$\mathbf{t_{Torre} = \sqrt{\frac{322}{5}}}$$

$t_{Torre} = 8{,}02$ s

Reemplazamos t_{Torre} en (7):
$V_0 \times 8{,}02 = 400$
$V_0 = 400/8{,}02$
$V_0 = 49{,}88$ m/s