CONTROL Nº 1 – FÍSICA MECÁNICA

Tiempo: 1 hora 20 min
Fecha: 29/09/2009

Pregunta 1

Se tienen 3 vectores: A, B y C. A tiene magnitud A = 5.0 y ángulo θ_A = 26º medido desde el eje x al eje y. B tiene magnitud B = 4.0 y ángulo θ_B = 63º medido desde el eje x al eje y. C tiene magnitud C = 6.0 y sigue el eje z desde el origen en sentido positivo. A y B están en el plano x/y.

Calcule (A x B)·C

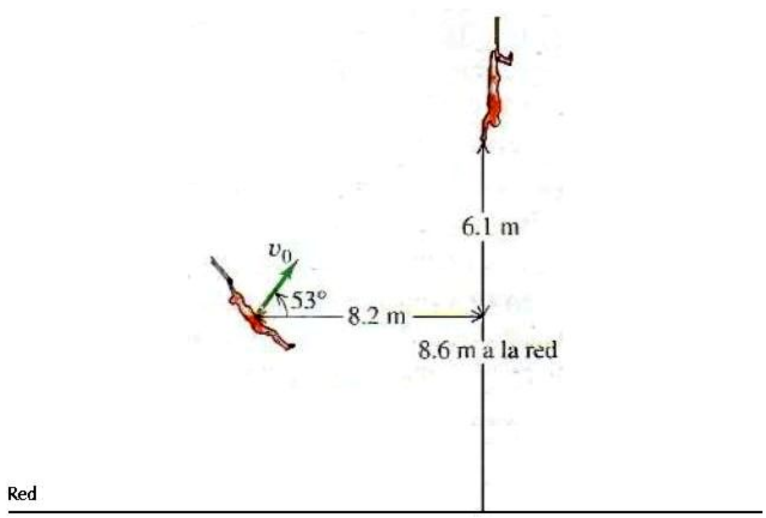
Pregunta 2

En un nuevo acto circense, Maribel, la estrella del acto, se columpia de un trapecio y se proyecta con un ángulo de 53º, según la figura. José, su compañero, tiene sus manos 6,1 m arriba y 8,2 m delante del punto de lanzamiento.

a) ¿Qué velocidad inicial v_o debe tener Maribel para alcanzar *apenas* a José?

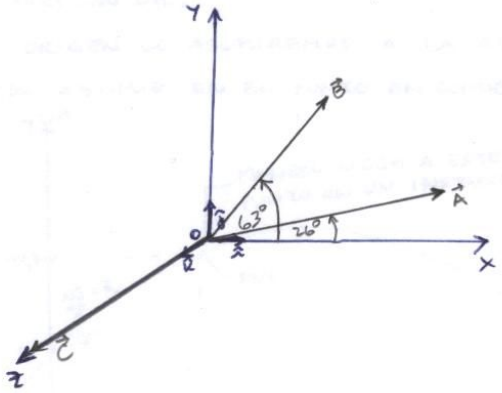
b) Dibuje gráficas x/t, y/t, v_x/t y v_y/t que muestren el movimiento de los dos trapecistas desde el inicio hasta que Maribel llega a José.

c) La noche del debut, José no atrapa a Maribel. ¿Qué distancia horizontal recorre ella desde su punto de lanzamiento antes de caer a la red que está 8,6 m debajo de dicho punto?



PAUTA CONTROL 1
F-MEC

P1) EXISTEN 3 VECTORES: $\vec{A}$, $\vec{B}$ Y $\vec{C}$. SE REPRESENTAN ASÍ:



$|\vec{A}| = 5 = A$

$|\vec{B}| = 4 = B$

$|\vec{C}| = 6 = C$

$\vec{C} = C \cdot \hat{k} = 6\hat{k}$

LA FORMA MÁS FÁCIL DE RESOLVERLO ES USANDO LAS SIGUIENTES FÓRMULAS DE PRODUCTO PUNTO Y PRODUCTO CRUZ:

$\vec{A} \cdot \vec{B} = A \cdot B \cdot \cos\theta$

$\vec{A} \times \vec{B} = A \cdot B \cdot \text{sen}\,\theta$

$\theta = 63° - 26°$

$\theta = 37°$

RESOLVAMOS:

$\vec{A} \times \vec{B} = A \cdot B \cdot \text{sen}\,37° = 5 \cdot 4 \cdot 0{,}6018\,\hat{k} = 20 \cdot 0{,}6018\,\hat{k}$

$\vec{A} \times \vec{B} = 12{,}04\,\hat{k}$

OJO: $\vec{A} \times \vec{B}$ TIENE COMO RESULTADO UN VECTOR CUYA DIRECCIÓN ES PERPENDICULAR AL PLANO QUE CONTIENE A LOS VECTORES $\vec{A}$ Y $\vec{B}$. COMO EL PLANO QUE CONTIENE A LOS VECTORES $\vec{A}$ Y $\vec{B}$ ES EL PLANO X/Y, SU PRODUCTO CRUZ TENDRÁ COMO RESULTADO UN VECTOR CON DIRECCIÓN EN EL EJE Z, POR LO QUE SE MULTIPLICA POR $\hat{k}$.

AHORA RESOLVEMOS:

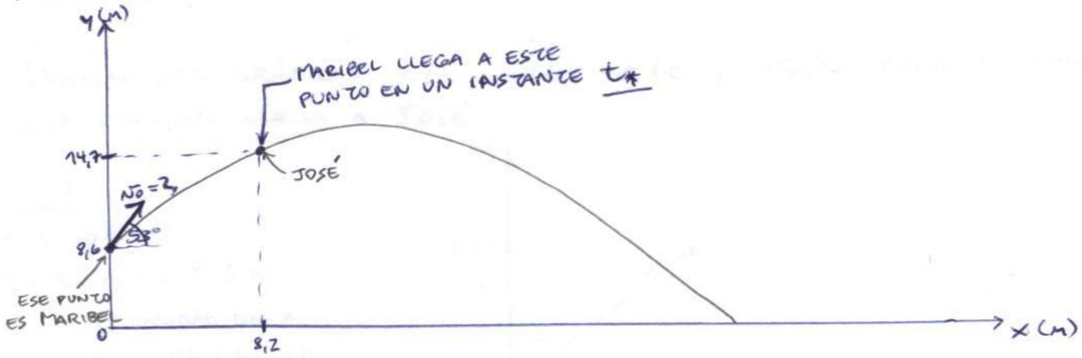
$$\boxed{(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} = 12{,}04\,\hat{k} \cdot 6\,\hat{k} = 72{,}24}$$

¿POR QUÉ? SENCILLAMENTE PORQUE EL RESULTADO DE UN PRODUCTO PUNTO ES UN ESCALAR:

$12{,}04\,\hat{k} \cdot 6\,\hat{k} = 12{,}04 \cdot 6 \cdot \cos 0° = 12{,}04 \cdot 6 = 72{,}24$, YA QUE EL ÁNGULO ENTRE LOS VECTORES $\hat{k}$ Y $\hat{k}$ ES 0°.

P2) ESTE PROBLEMA DE LOS TRAPECISTAS NO ES MÁS QUE UN PROBLEMA TÍPICO DE PROYECTILES. MARIBEL PUEDE SER CONSIDERADA COMO UN PROYECTIL QUE SE LANZA CON VELOCIDAD INICIAL v_0 Y UN ÁNGULO DE 53° RESPECTO A LA HORIZONTAL.

EL ORIGEN LO ASUMIREMOS A LA ALTURA DE LA RED, AUNQUE TAMBIÉN SE PUEDE ASUMIR EN EL PUNTO EN DONDE ESTÁ MARIBEL.



a) DATOS:

$y_0 = 8{,}6$ m

$x_0 = 0$ m

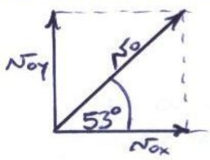
$v_{0x} = 0{,}6\, v_0$

$v_{0y} = 0{,}8\, v_0$

$x = x_0 + v_{0x} \cdot t$ ①

$y = y_0 + v_{0y} \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2}$ ②

v_0 SE DESCOMPONE ASÍ:



$v_{0x} = v_0 \cdot \cos 53°$

$v_{0y} = v_0 \cdot \text{sen}\, 53°$

$v_{0x} = v_0 \cdot 0{,}6$

$v_{0y} = v_0 \cdot 0{,}8$

AHORA v_{0x} Y v_{0y} ME QUEDAN EXPRESADAS EN FUNCIÓN DE v_0

REEMPLAZAMOS LOS DATOS EN ① Y EN ② EN EL INSTANTE t_* EN QUE MARIBEL LLEGA A JOSÉ

① $x = 8{,}2 = 0 + 0{,}6\, v_0 \cdot t_* \Rightarrow 8{,}2 = 0{,}6\, v_0 \cdot t_*$ ③

② $y = 14{,}7 = 8{,}6 + 0{,}8\, v_0 \cdot t_* - 5 \cdot t_*^2 \Rightarrow 14{,}7 = 8{,}6 + 0{,}8 \cdot v_0 \cdot t_* - 5 t_*^2$ ④

DESPEJAMOS t_* EN ③:

$t_* = \frac{8{,}2}{0{,}6\, v_0}$ Y AHORA REEMPLAZAMOS EN ④

$14{,}7 = 8{,}6 + 0{,}8 \cdot \cancel{v_0} \cdot \frac{8{,}2}{0{,}6\, \cancel{v_0}} - 5 \cdot t_*^2$

$14{,}7 = 8{,}6 + 10{,}93 - 5 \cdot t_*^2$

$5 \cdot t_*^2 = 8{,}6 + 10{,}93 - 14{,}7 = 4{,}83$

$t_*^2 = \frac{4{,}83}{5} = 0{,}97$

$t_* = \sqrt{0{,}97} \Rightarrow \boxed{t_* = 0{,}98\ \text{s}}$ (INSTANTE EN QUE MARIBEL LLEGA A JOSÉ)

FINALMENTE, REEMPLAZAMOS t_* EN ③

$$8{,}2 = 0{,}6\, v_0 \cdot 0{,}98 \Rightarrow 8{,}2 = 0{,}59\, v_0$$

$$\frac{8{,}2}{0{,}59} = v_0 \Rightarrow \boxed{v_0 = 13{,}9\ m/s}$$

EN REALIDAD, v_0 DA ALREDEDOR DE 14 m/s, DEPENDIENDO DE CUÁNTOS DECIMALES SE USARON EN LOS CÁLCULOS.

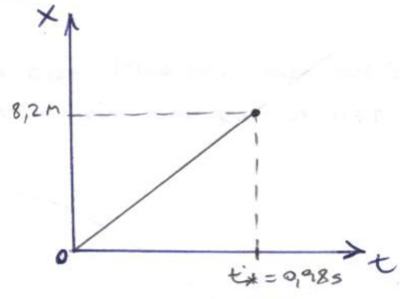
b) DIBUJAR LAS GRÁFICAS x/t, y/t, v_x/t Y v_y/t DESDE EL INICIO HASTA QUE MARIBEL LLEGA A JOSÉ.

x/t

$t=0 \Rightarrow x=0$

$t=t_* \Rightarrow x = 8{,}2\ m$

COMO LA VELOCIDAD EN X ES CONSTANTE, EL GRÁFICO SERÁ UNA RECTA.

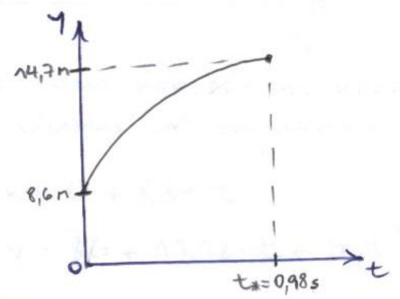


y/t

$t=0 \Rightarrow y = 8{,}6$

$t = t_* \Rightarrow y = 14{,}7$

LA VELOCIDAD EN Y NO ES CONSTANTE, SINO QUE DISMINUYE A MEDIDA QUE CRECE t, POR LO QUE EL GRÁFICO SERÁ UNA CURVA.



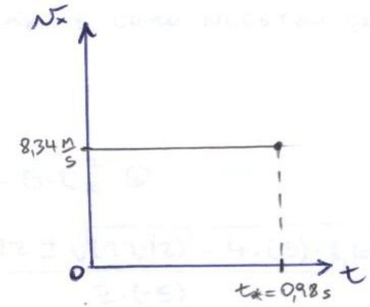
LA CURVA ES CÓNCAVA HACIA ABAJO PORQUE A MEDIDA QUE PASA t, Y CRECE CADA VEZ MENOS, HASTA QUE MARIBEL LLEGA A JOSÉ.

v_x/t

v_x ES CONSTANTE E IGUAL A v_{0x}.

$v_{0x} = 0{,}6\, v_0 = 0{,}6 \times 13{,}9$

$v_{0x} = 8{,}34\ m/s$



v_y / t

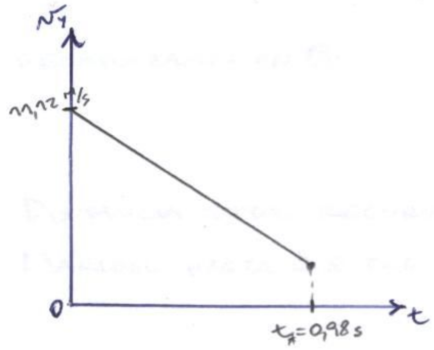
v_y DISMINUYE LINEALMENTE CON t.

$v_{0y} = v_0 \cdot 0{,}8 = 11{,}12\ m/s$

EN $t_* = 0{,}98\,s$,

$v_y = 11{,}12 - \underset{g}{10} \cdot 0{,}98$

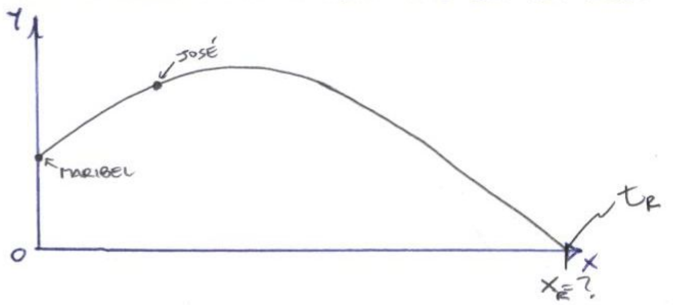
$v_y = 1{,}32\ m/s$



NO OLVIDAR QUE:

$v_y = v_{0y} - g \cdot t$

c) EN ESTE CASO, SE CONSIDERA QUE MARIBEL PASA POR DONDE ESTÁ JOSÉ, PERO CONTINÚA SU TRAYECTORIA HASTA QUE CAE EN LA RED.



SE BUSCA x_R, QUE ES LA DISTANCIA HORIZONTAL RECORRIDA POR MARIBEL HASTA QUE CAE EN LA RED. USAMOS LAS ECUACIONES ① Y ②.

① $x = x_0 + v_{0x} \cdot t \Rightarrow x = 0 + 8{,}34 \cdot t$

② $y = y_0 + v_{0y} \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2} \Rightarrow y = 8{,}6 + 11{,}12 \cdot t - 5 \cdot t^2$

EN UN INSTANTE t_R, MARIBEL CAE EN LA RED. EN ESE MOMENTO, SU DISTANCIA HORIZONTAL RECORRIDA ES X_R Y COMO NUESTRO ORIGEN ESTÁ A LA ALTURA DE LA RED, $Y = 0$. LUEGO:

$x_R = 8{,}34 \cdot t_R$ ⑤

$y = 0 = 8{,}6 + 11{,}12 \cdot t_R - 5 \cdot t_R^2$ ⑥

$$\left.\begin{array}{l} a = -5 \\ b = 11{,}12 \\ c = 8{,}6 \end{array}\right\} \quad t_R = \frac{-11{,}12 \pm \sqrt{(11{,}12)^2 - 4 \cdot (-5) \cdot 8{,}6}}{2 \cdot (-5)} = \frac{-11{,}12 \pm \sqrt{123{,}65 + 172}}{-10}$$

$$t_R = \frac{-11{,}12 \pm \sqrt{295{,}65}}{-10} = \frac{-11{,}12 \pm 17{,}19}{-10}$$

PARA QUE $t_R > 0$, USAMOS SIGNO (−)

$$= \frac{-11{,}12 - 17{,}19}{-10} = 2{,}83 \Rightarrow \boxed{t_R = 2{,}83\,s}$$

CON $t_R = 2,83\,s$, REEMPLAZAMOS EN 5

$x_R = 8,34 \cdot 2,83$

$\boxed{x_R = 23,6\,m}$ DISTANCIA TOTAL RECORRIDA POR MARIBEL HASTA QUE CAE EN LA RED