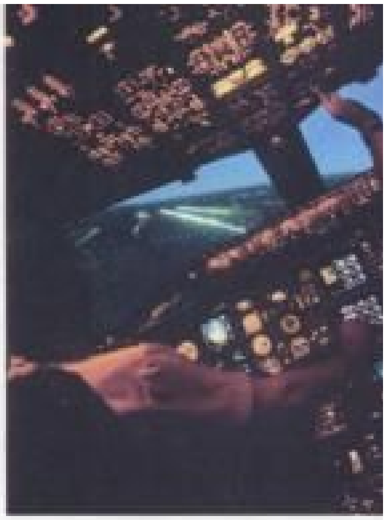
Capítulo 3

Vectores

CONTENIDO DEL CAPÍTULO

▲ *Estos controles de la cabina de un avión comercial ayudan al piloto a mantener el control sobre la velocidad de la nave, con qué velocidad volar y en qué dirección volar, lo que le permite aterrizar con seguridad. Las cantidades definidas por una magnitud y una dirección, por ejemplo velocidad, se llaman cantidades vectoriales. (Mark Wagner/Getty Images)*



En nuestro estudio de física, con frecuencia necesitamos trabajar con cantidades físicas que tienen propiedades numéricas y direccionales. Como se hizo notar en la sección 2.1, las cantidades de esta naturaleza son cantidades vectoriales. En este capítulo se expone el álgebra vectorial y algunas propiedades generales de cantidades vectoriales. Estudiamos la adición y sustracción de cantidades vectoriales, junto con algunas aplicaciones comunes a situaciones físicas.

En todo este texto se usan cantidades vectoriales y, por lo tanto, es imperativo que el estudiante domine tanto sus propiedades gráficas como las algebraicas.

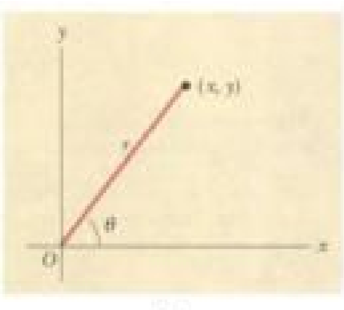
3.1 Sistemas de coordenadas

Numerosos aspectos de la física se relacionan con la descripción de un punto en el espacio. En el capítulo 2, por ejemplo, vimos que la descripción matemática del movimiento de un objeto requiere un método para describir la posición del objeto en varios instantes. Esta descripción se logra con el uso de coordenadas, y en el capítulo 2 utilizamos el sistema de coordenadas cartesianas, en el que los ejes horizontal y vertical se cruzan en un punto definido como el origen (figura 3.1). Las coordenadas cartesianas también se denominan *coordenadas rectangulares.*

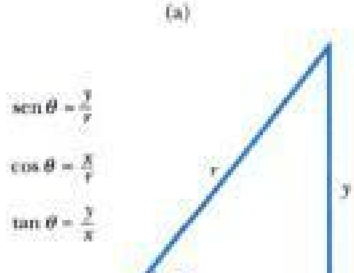
A veces es más conveniente representar un punto en un plano por sus *coordenadas polares planas* (r, θ), como se ve en la figura 3.2a. En este *sistema de coordenadas polares, r* es la distancia desde el origen al punto que tiene coordenadas cartesianas, (x, y), y θ es el ángulo entre una recta trazada del origen al punto y un eje fijo. Este eje fijo suele ser el eje x positivo, y θ por lo general se mide en sentido dextrógiro desde dicho eje. Del triángulo rectángulo de la figura 3.2b, encontramos que sen $\theta = y/r$ y que $\cos\theta = x/r$. (En el apéndice B.4 se da un repaso de funciones trigonométricas.) Por lo tanto, comenzando con las coordenadas polares planas de cualquier punto, podemos obtener las coordenadas cartesianas mediante el uso de las ecuaciones siguientes:

$$x = r\cos\theta \tag{3.1}$$

$$y = r\,\text{sen}\,\theta \tag{3.2}$$



(a)



(b)

Figura 3.2 (a) Las coordenadas polares planas de un punto están representadas por la distancia r y el ángulo q, donde q se mide en sentido dextrógiro desde el eje x positivo. (b) Triángulo rectángulo empleado para relacionar (x, y) con (r, q).

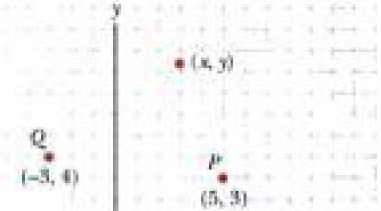


Figura 3.1 Designación de puntos de un sistema de coordenadas cartesianas. Todo punto está marcado con coordenadas (x, y).

Además, las definiciones de trigonometría nos dicen que

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \tag{3.3}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{3.4}$$

La ecuación 3.4 es el conocido teorema de Pitágoras.

Estas cuatro expresiones que relacionan las coordenadas (x, y) con las coordenadas (r, θ) se aplican sólo cuando θ está definido como se muestra en la figura 3.2a, es decir, cuando θ positivo es un ángulo medido en sentido dextrógiro desde el eje x positivo. (Algunas calculadoras científicas hacen conversiones entre coordenadas cartesianas y polares con base en estas convenciones estándar.) Si el eje de referencia para el ángulo polar θ se selecciona como otro diferente al eje x positivo, o si el sentido de θ creciente se escoge distinto, entonces cambiarán las expresiones que relacionan los dos conjuntos de coordenadas.

Ejemplo 3.1 Coordenadas polares

Las coordenadas cartesianas de un punto del plano xy son $(x, y) = (-3.50, -2.50)$ m, como se ve en la figura 3.3. Hállense las coordenadas polares de este punto.

Solución Por medio de los ejemplos de éste y los dos capítulos siguientes, ilustramos el uso de la estrategia general para la solución de problemas que aparece al final del capítulo 2. En capítulos subsiguientes haremos menos referencias explícitas a esta estrategia, cuando el lector se familiarice con ella y la aplique por sí mismo. El dibujo de la figura 3.3 nos ayuda a *conceptualizar* el problema. Podemos *clasificar por categorías* éste como un problema de sustituciones. De la ecuación 3.4,

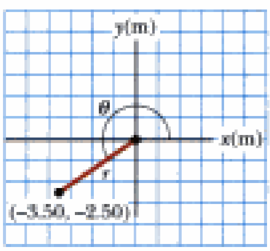


Figura activa 3.3 (Ejemplo 3.1) Encontrar coordenadas polares cuando se dan coordenadas cartesianas.

En el vínculo Active Figures en http://www.pse6.com, usted puede mover el punto en el plano xy y observar cómo cambian sus coordenadas polares y cartesianas.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-3.50\text{ m})^2 + (-2.50\text{ m})^2} = \mathbf{4.30\text{ m}}$$

y de la ecuación 3.3,

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-2.50\text{ m}}{-3.50\text{ m}} = 0.714$$

$$\theta = \mathbf{216°}$$

Nótese que es necesario usar los signos de x e y para hallar que el punto se encuentra en el tercer cuadrante del sistema de coordenadas. Esto es, $\theta = 216°$ y no $35.5°$.

3.2 Cantidades vectoriales y escalares

Como se hizo notar en el capítulo 2, algunas cantidades físicas son cantidades escalares, mientras que otras son cantidades vectoriales. Cuando se desea conocer la temperatura exterior para saber qué ropa usar, la única información necesaria es un número y la unidad "grados C" o "grados F". La temperatura es, por lo tanto, un ejemplo de una *cantidad escalar*:

Una **cantidad escalar** está especificada completamente por un solo valor con una unidad apropiada y no tiene dirección.

Otros ejemplos de cantidades escalares son volumen, masa, rapidez y los intervalos de tiempo. Se usan las reglas de aritmética ordinaria para manipular cantidades escalares.

Si el lector se está preparando para pilotear un avión pequeño y necesita conocer la velocidad del viento, debe conocer la rapidez del viento y su dirección. Debido a que la dirección es importante para su completa clasificación, la velocidad es una *cantidad vectorial*:

Una **cantidad vectorial** está especificada completamente por un número y unidades apropiadas, más una dirección.

Figura 3.4 Cuando una partícula se mueve de Ⓐ a Ⓑ, a lo largo de una trayectoria arbitraria representada por la línea punteada, su desplazamiento es una cantidad vectorial mostrada por la flecha trazada de Ⓐ a Ⓑ.

Otro ejemplo de una cantidad vectorial es el desplazamiento, como sabemos del capítulo 2. Suponga que una partícula se mueve de algún punto Ⓐ hasta algún punto Ⓑ a lo largo de una trayectoria recta, como se ve en la figura 3.4. Representamos este desplazamiento al trazar una flecha de Ⓐ a Ⓑ, con la punta de la flecha apuntando desde el punto inicial. La dirección de la punta de flecha representa la dirección del desplazamiento, y la longitud de la flecha representa la magnitud del desplazamiento. Si la partícula se mueve a lo largo de alguna otra trayectoria de Ⓐ a Ⓑ, por ejemplo la línea punteada de la figura 3.4, su desplazamiento es todavía la flecha trazada de Ⓐ a Ⓑ. El desplazamiento depende sólo de las posiciones inicial y final, de modo que el vector desplazamiento es independiente de la trayectoria tomada entre estos dos puntos.

En este texto usamos letras negritas, por ejemplo **A**, para representar una cantidad vectorial. Es útil otra notación cuando es difícil la notación en negritas, como es el caso cuando se escribe en papel o en una pizarra, y consiste en escribir una flecha sobre el símbolo del vector: $\vec{A}$. La magnitud del vector **A** se escribe ya sea A o $|\mathbf{A}|$. La magnitud de un vector tiene unidades físicas, por ejemplo metros para desplazamiento o metros por segundo para velocidad. La magnitud de un vector *siempre* es un número positivo.

Pregunta rápida 3.1 De las siguientes, ¿cuáles son cantidades vectoriales y cuáles son cantidades escalares? (a) su edad (b) aceleración (c) velocidad (d) rapidez (e) masa.

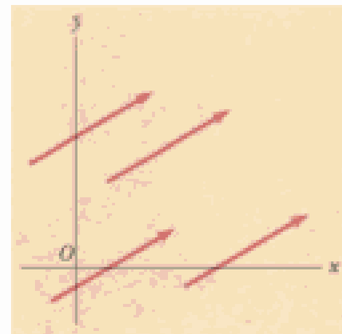


Figura 3.5 Estos cuatro vectores son iguales porque tienen longitudes iguales y apuntan en la misma dirección.

3.3 Algunas propiedades de vectores

Igualdad de dos vectores

Para muchos propósitos, dos vectores **A** y **B** pueden definirse como iguales si tienen la misma magnitud y apuntan en la misma dirección. Esto es, **A** = **B** sólo si $A = B$ y si **A** y **B** apuntan en la misma dirección a lo largo de líneas paralelas. Por ejemplo, todos los vectores de la figura 3.5 son iguales, aun cuando tienen diferentes puntos iniciales. Esta propiedad nos permite en un diagrama mover un vector a una posición paralela a sí mismo sin afectar el vector.

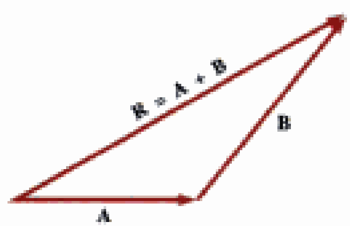


Figura 3.6 Cuando se adiciona un vector **B** a un vector **A**, la resultante **R** es el vector que corre de la cola de **A** a la punta de **B**.

Adición de vectores

Las reglas para adición de vectores se describen en forma conveniente con métodos gráficos. Para adicionar el vector **B** al vector **A**, primero se traza el vector **A** en un papel de gráficas, con su magnitud representada por una escala conveniente de longitud, y luego se traza el vector **B** a la misma escala con su cola iniciando de la punta de **A**, como se muestra en la figura 3.6. El **vector resultante R = A + B** es el vector trazado desde la cola de **A** hasta la punta de **B**.

Por ejemplo, si una persona camina 3.0 metros hacia el este y luego 4.0 metros hacia el norte, como se ve en la figura 3.7, se encontraría a 5.0 metros de donde inició, medido a un ángulo de 53° al norte del este. Su desplazamiento total es el vector adición de los desplazamientos individuales.

También se puede usar una construcción geométrica para adicionar más de dos vectores. Esto se ilustra en la figura 3.8 para el caso de cuatro vectores. El vector resultante **R** = **A** + **B** + **C** + **D** es el vector que completa el polígono. En otras palabras, **R es el vector trazado desde la cola del primer vector hasta la punta del último vector.**

Cuando se adicionan dos vectores, la adición es independiente del orden de la adición. (Esto puede parecer trivial, pero como se verá en el capítulo 11, el orden es importante

¡ADVERTENCIA!

3.1 Adición vectorial contra adición escalar

Recuerde que **A** + **B** = **C** es muy diferente de $A + B = C$. La primera es una adición vectorial, que debemos manejar con cuidado, como es el caso con el método gráfico descrito aquí. La segunda es una simple adición algebraica de números que se maneja con las reglas normales de aritmética.

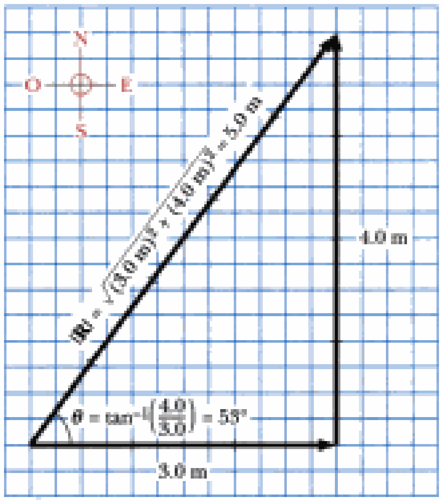


Figura 3.7 Adición vectorial. Si camina primero 3.0 metros al este y luego 4.0 metros al norte, lo deja a 5.0 metros de su punto de partida.

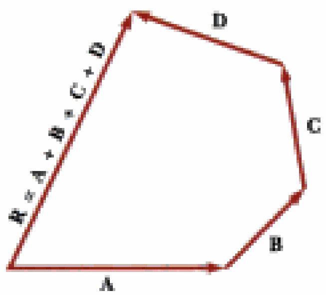


Figura 3.8 Construcción geométrica para adiciónr cuatro vectores. El vector resultante **R** es, por definición, el que completa el polígono.

cuando se multiplican vectores). Esto puede verse desde la construcción geométrica de la figura 3.9, y se conoce como la **ley conmutativa de la adición:**

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A} \tag{3.5}$$

Cuando se adicionan tres o más vectores, su adición es independiente de la forma en que los vectores individuales se agrupan juntos. Una prueba geométrica de esta regla para tres vectores se da en la figura 3.10. Esto se llama **ley asociativa de la adición:**

$$\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} \tag{3.6}$$

En resumen, **una cantidad vectorial tiene magnitud y dirección, y también obedece las leyes de la adición vectorial** como se ve en las figuras 3.6 a la 3.10. Cuando se adicionan dos o más vectores, todos ellos deben tener las mismas unidades y todos ellos deben ser del mismo tipo de cantidad. No tendría sentido adicionar un vector velocidad (por ejemplo 60 km/h al este) a un vector de desplazamiento (por ejemplo, 200 km al norte), porque representan cantidades físicas diferentes. La misma regla se aplica a escalares. Por ejemplo, sería inconsistente adicionar intervalos (de tiempo) con temperaturas.

Negativo de un vector

El negativo del vector **A** se define como el vector que al adicionarse a **A** da cero como la adición vectorial. Esto es, $\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = 0$. Los vectores **A** y $-\mathbf{A}$ tienen la misma magnitud pero apuntan en direcciones opuestas.

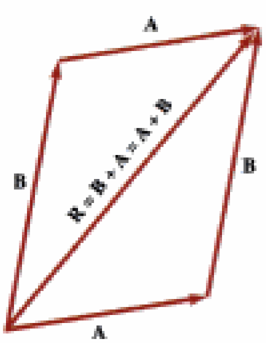


Figura 3.9 Esta construcción muestra que $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$, es decir, que la adición vectorial es conmutativa.

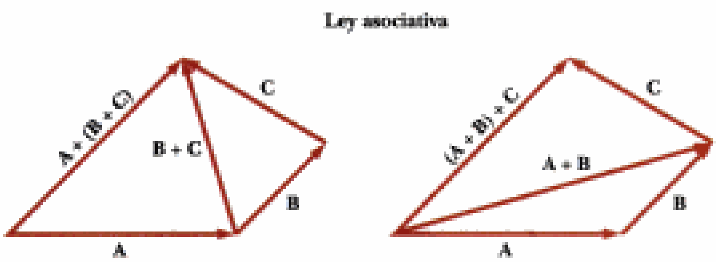


Figura 3.10 Construcciones geométricas para verificar la ley asociativa de la adición.

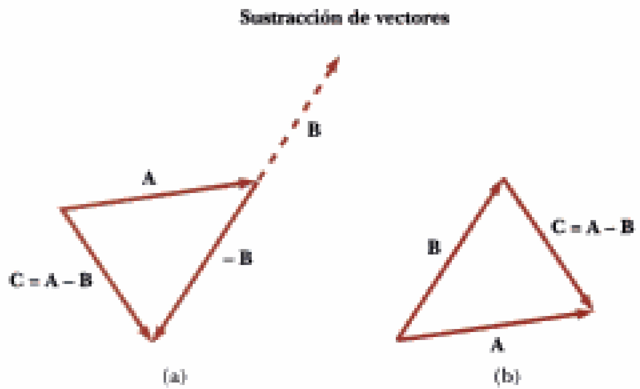


Figura 3.11 (a) Esta construcción muestra la forma de sustraer el vector **B** del vector **A**. El vector −**B** es igual en magnitud al vector **B** y apunta en dirección opuesta. Para sustraer **B** de **A**, aplique la regla de la adición vectorial a la combinación de **A** y −**B**: Trace **A** a lo largo de algún eje conveniente, ponga la cola de −**B** en la punta de **A**, y **C** es la diferencia **A** − **B**. (b) Segunda forma de ver una sustracción vectorial. El vector diferencia **C** = **A** − **B** es el vector que debemos adicionar a **B** para obtener **A**.

Sustracción de vectores

La sustracción de vectores hace uso de la definición del negativo de un vector. Definimos la operación **A** − **B** como el vector −**B** adicionado al vector **A**:

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B}) \tag{3.7}$$

La construcción geométrica para sustraer dos vectores en esta forma está ilustrada en la figura 3.11a.

Otra forma de ver una sustracción vectorial es observar que la diferencia **A** − **B** entre dos vectores **A** y **B**. Es lo que debe adicionarse al segundo vector para obtener el primero. En este caso, el vector **A** − **B** apunta de la punta del segundo vector a la punta del primero, como se ve en la figura 3.11b.

Pregunta rápida 3.2 Las magnitudes de dos vectores **A** y **B** son $A = 12$ unidades y $B = 8$ unidades. ¿Cuál de los siguientes pares de números representa los posibles valores *máximo* y *mínimo* para la magnitud del vector resultante **R** = **A** + **B**? (a) 14.4 unidades, 4 unidades (b) 12 unidades, 8 unidades (c) 20 unidades, 4 unidades (d) ninguna de estas respuestas.

Pregunta rápida 3.3 Si el vector **B** se adiciona al vector **A**, ¿bajo qué condiciones el vector resultante **A** + **B** tiene magnitud $A + B$? (a) **A** y **B** son paralelos y en la misma dirección. (b) **A** y **B** son paralelos y en direcciones opuestas. (c) **A** y **B** son perpendiculares.

Pregunta rápida 3.4 Si el vector **B** se adiciona al vector **A**, ¿cuáles *dos* de las siguientes opciones deben ser verdaderas para que el vector resultante sea igual a cero? (a) **A** y **B** son paralelos y en la misma dirección. (b) **A** y **B** son paralelos y en direcciones opuestas. (c) **A** y **B** tienen la misma magnitud. (d) **A** y **B** son perpendiculares.

Ejemplo 3.2 Un viaje de vacaciones

Un auto recorre 20.0 kilómetros rumbo al norte y luego 35.0 kilómetros en dirección 60.0° al oeste del norte, como se ve en la figura 3.12a. Hállense la magnitud y dirección del desplazamiento resultante del auto.

Solución Los vectores **A** y **B** trazados en la figura 3.12a ayudan a *conceptualizar* el problema. Podemos *clasificar por categorías* esto como un problema de análisis relativamente sencillo en adición vectorial. El desplazamiento **R** es la resultante cuando se adicionan los dos desplazamientos individuales **A** y **B**. Podemos además clasificar por categorías esto como un problema acerca del análisis de triángulos, de modo que recurrimos a nuestra experiencia en geometría y trigonometría.

En este ejemplo mostramos dos formas para *analizar* el problema al hallar la resultante de dos vectores. La primera forma es resolver el problema geométricamente, con el uso de papel de gráficas y un transportador para medir la magnitud de **R** y su dirección en la figura 3.12a. (De hecho, aun cuando el lector considera que va a realizar un cálculo, debe trazar los vectores para comprobar sus resultados.) Con una regla y transportador comunes y corrientes, un diagrama grande suele dar respuestas a dos dígitos, pero no a la precisión de tres dígitos.

La segunda forma de resolver el problema es analizarlo algebraicamente. La magnitud de **R** se puede obtener de la ley de los cosenos cuando se aplica al triángulo (vea el apéndice B.4). Con $\theta = 180° - 60° = 120°$ y $R^2 = A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta$, encontramos

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta}$$

$$= \sqrt{(20.0\text{ km})^2 + (35.0\text{ km})^2 - 2(20.0\text{ km})(35.0\text{ km})\cos 120°}$$

$$= \mathbf{48.2\text{ km}}$$

La dirección de **R** medida desde la dirección norte puede obtenerse de la ley de los senos (apéndice B.4):

$$\frac{\operatorname{sen}\beta}{B} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{R}$$

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{B}{R}\operatorname{sen}\theta = \frac{35.0\text{ km}}{48.2\text{ km}}\operatorname{sen}120° = 0.629$$

$$\beta = 39.0°$$

El desplazamiento resultante del auto es 48.2 kilómetros en una dirección 39.0° al oeste del norte.

Ahora *finalizamos* el problema. El ángulo θ que calculamos ¿concuerda con la estimación hecha al ver la figura 3.12a o con un ángulo real medido del diagrama usando el método gráfico? ¿Es razonable que la magnitud de **R** sea mayor que la de **A** y **B**? ¿Son correctas las unidades de **R**?

Si bien es cierto que el método gráfico de adicionar vectores funciona bien, sufre de dos desventajas. Primero, hay quienes encuentran que usar las leyes de los cosenos y los senos son engorrosas. En segundo término, un triángulo sólo resulta si se adicionan dos vectores. Si se adicionan tres o más vectores, la forma geométrica resultante no es un triángulo. En la sección 3.4 exploramos un nuevo método de adicionar vectores que resuelve estas dos desventajas.

¿Qué pasaría si? Suponga que el viaje fuera tomado con los dos vectores en orden inverso: 35.0 km a 60.0° al oeste del norte primero, y luego 20.0 km al norte. ¿Cómo cambiarían la magnitud y la dirección del vector resultante?

Respuesta No cambiarían. La ley conmutativa para la adición vectorial nos dice que el orden de vectores en una adición no es relevante. Gráficamente, la figura 3.12 muestra que los vectores adicionados en orden inverso nos da el mismo vector resultante.

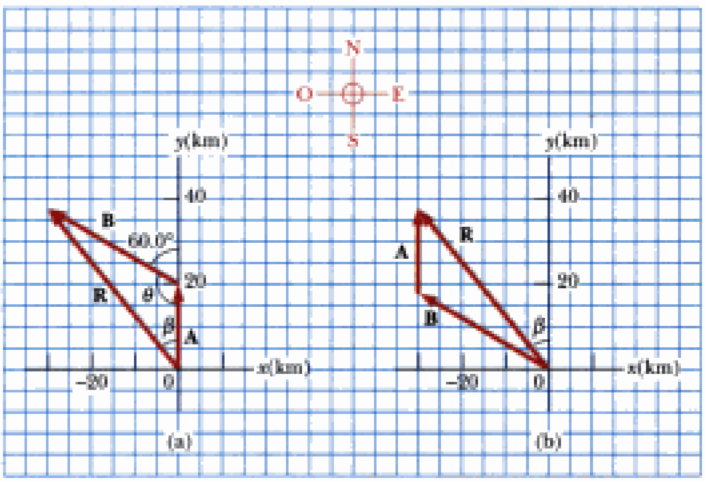


Figura 3.12 (Ejemplo 3.2) (a) Método gráfico para hallar el vector resultante de desplazamiento **R** = **A** + **B**. (b) Adicionar los vectores en orden inverso (**B** + **A**) da el mismo resultado para **R**.

Multiplicación de un vector por un escalar

Si un vector **A** se multiplica por una cantidad escalar positiva m, entonces el producto m**A** es un vector que tiene la misma dirección que **A** y magnitud mA. Si un vector **A** se multiplica por una cantidad escalar negativa $-m$, entonces el producto $-m$**A** es en dirección opuesta a **A**. Por ejemplo, el vector 5**A** tiene una longitud cinco veces A y apunta en la misma dirección que **A**; el vector $-\frac{1}{3}$**A** tiene un tercio de la longitud de A y apunta en la dirección contraria a **A**.

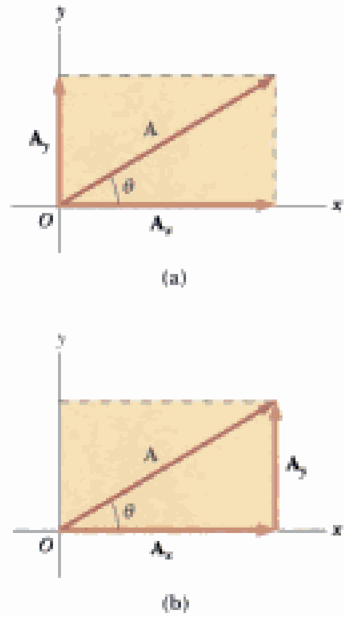


Figura 3.13 (a) Un vector **A** que se encuentre en el plano xy puede ser representado por sus vectores componentes $\mathbf{A}_x$ y $\mathbf{A}_y$. (b) El vector componente $\mathbf{A}_y$ de las y puede moverse a la derecha para que se adicione a $\mathbf{A}_x$. La adición vectorial de los vectores componentes es **A**. Estos tres vectores forman un triángulo rectángulo.

3.4 Componentes de un vector y unidades vectoriales

El método gráfico para la adición de vectores no es recomendable cuando se necesita una exactitud muy alta en problemas de tres dimensiones. En esta sección se describe un método para la adición de vectores que utiliza la proyección de vectores a lo largo de ejes coordinados. A tales proyecciones se les llama **componentes** de un vector y un vector puede describirse completamente a partir de sus componentes.

Considere un vector **A** que esté en el plano xy y forme un ángulo arbitrario θ con el eje positivo x, como se muestra en la figura 3.13a. Este vector se puede expresar como la adición de otros dos vectores $\mathbf{A}_x$ y $\mathbf{A}_y$. Con frecuencia vamos a referirnos a "componentes de un vector **A**", escrito A_x y A_y (sin notación en negritas). El componente A_x representa la proyección de A a lo largo del eje x, y la componente A_y representa la proyección de **A** a lo largo del eje y. Estos componentes pueden ser positivos o negativos. El componente A_x es positivo si $\mathbf{A}_x$ apunta en la dirección x positiva y es negativo si $\mathbf{A}_x$ apunta en la dirección x negativa. Lo mismo es cierto para el componente A_y.

De la figura 3.13 y de la definición de seno y coseno, vemos que $\cos\theta = A_x/A$ y que $\operatorname{sen}\theta = A_y/A$. Por lo tanto, los componentes de A son

$$A_x = A\cos\theta \tag{3.8}$$

$$A_y = A\operatorname{sen}\theta \tag{3.9}$$

Componentes de el vector A

Estos componentes forman dos lados de un triángulo rectángulo con una hipotenusa de longitud A. Por lo tanto, se deduce que la magnitud y dirección de **A** están relacionadas con sus componentes a través de las expresiones

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \tag{3.10}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{A_y}{A_x}\right) \tag{3.11}$$

¡ADVERTENCIA!

3.2 Vectores componentes contra componentes

Los vectores $\mathbf{A}_x$ y $\mathbf{A}_y$ son los *vectores componentes* de **A**. Éstos no deben confundirse con los escalares A_x y A_y, a los que siempre vamos a denominar *componentes* de **A**.

Nótese que los **signos de los componentes A_x y A_y dependen del ángulo θ**. Por ejemplo, si $\theta = 120°$, entonces A_x es negativo y A_y es positivo. Si $\theta = 225°$, entonces A_x y A_y son negativos. La figura 3.14 resume los signos de los componentes cuando **A** se encuentra en los diferentes cuadrantes.

Cuando resuelva problemas, el lector puede especificar un vector **A** ya sea con sus componentes A_x y A_y o con su magnitud y dirección A y θ.

Pregunta rápida 3.5 Elija la respuesta correcta para que la oración sea verdadera: Un componente de un vector es (a) siempre, (b) nunca, o (c) a veces mayor que la magnitud del vector.

	y	
	A_x negativo A_y positivo	A_x positivo A_y positivo
x	A_x negativo A_y negativo	A_x positivo A_y negativo

Figura 3.14 Los signos de las componentes de un vector **A** dependen del cuadrante en el que se encuentre el vector.

Suponga que se trabaja en un problema de física que requiere descomponer un vector en sus componentes. En numerosas aplicaciones es conveniente expresar los componentes de un sistema de coordenadas que tiene ejes que no son horizontal y vertical, pero que son perpendiculares entre sí. Si se seleccionan ejes de referencia o un ángulo que no sean los ejes y el ángulo que se muestra en la figura 3.13, los componentes deben modificarse según esas diferencias. Suponga que un vector **B** forma un ángulo θ' con el eje x' definido en la fi-

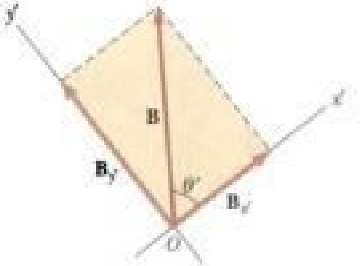


Figura 3.15 Vectores componentes de **B** en un sistema de coordenadas que está rotado.

gura 3.15. Los componentes de **B** a lo largo de los ejes x' y y' son $B_{x'} = B\cos\theta'$ y $B_{y'} = B\,\text{sen}\,\theta'$, especificados por las ecuaciones 3.8 y 3.9. La magnitud y dirección de **B** se obtienen de las expresiones equivalentes a las ecuaciones 3.10 y 3.11. Por lo tanto, podemos expresar los componentes de un vector en cualquier sistema de coordenadas que sea conveniente para una situación en particular.

Vectores unitarios

Con frecuencia las cantidades vectoriales se expresan en términos de vectores unitarios. **Un vector unitario es un vector sin dimensiones que tiene una magnitud de exactamente 1.** Los vectores unitarios se utilizan para especificar una dirección dada y no tienen otra importancia física. Se usan sólo como conveniencia al describir una dirección en el espacio. Usaremos los símbolos $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$, y $\hat{\mathbf{k}}$ para representar vectores unitarios que apuntan en las direcciones positivas x, y, y z, respectivamente. (Los "sombreros" sobre los símbolos son una notación estándar para vectores unitarios). Los vectores unitarios $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$, y $\hat{\mathbf{k}}$ forman un conjunto de vectores mutuamente perpendiculares de un sistema de coordenadas de mano derecha, como se muestra en la figura 3.16a. La magnitud de cada vector unitario es igual a 1, es decir, $|\hat{\mathbf{i}}| = |\hat{\mathbf{j}}| = |\hat{\mathbf{k}}| = 1$.

Considere un vector **A** que se encuentra en el plano xy, como se muestra en la figura 3.16b. El producto del componente A_x y el vector unitario $\hat{\mathbf{i}}$ es el vector $A_x\hat{\mathbf{i}}$, que se encuentra sobre el eje x y tiene magnitud $|A_x|$. (El vector $A_x\hat{\mathbf{i}}$ es una representación alterna del vector $\mathbf{A}_x$.) De la misma manera, $A_y\hat{\mathbf{j}}$ es un vector de magnitud $|A_y|$ que se encuentra sobre el eje y. (De nuevo, el vector $A_y\hat{\mathbf{j}}$ es una representación alterna del vector $\mathbf{A}_y$.) En consecuencia, la notación de vectores unitarios para el vector **A** es

$$\mathbf{A} = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} \tag{3.12}$$

Por ejemplo, considere un punto situado en el plano xy y que tiene coordenadas cartesianas (x, y), como en la figura 3.17. El punto puede ser especificado por el vector de posición **r**, que en forma de vectores unitarios está dado por

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} \tag{3.13}$$

Esta notación nos dice que las componentes de **r** son las longitudes x e y.

Ahora veamos cómo usar componentes para adicionar vectores cuando el método gráfico no es suficientemente preciso. Suponga que deseamos adicionar el vector **B** al vector **A** en la ecuación 3.12, donde el vector **B** tiene componentes B_x y B_y. Todo lo que hacemos es adicionar los componentes x e y por separado. El vector resultante $\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ es, por lo tanto,

$$\mathbf{R} = (A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}}) + (B_x\hat{\mathbf{i}} + B_y\hat{\mathbf{j}})$$

o

$$\mathbf{R} = (A_x + B_x)\hat{\mathbf{i}} + (A_y + B_y)\hat{\mathbf{j}} \tag{3.14}$$

Dado que $\mathbf{R} = R_x\hat{\mathbf{i}} + R_y\hat{\mathbf{j}}$, vemos que los componentes del vector resultante son

$$\begin{aligned} R_x &= A_x + B_x \\ R_y &= A_y + B_y \end{aligned} \tag{3.15}$$

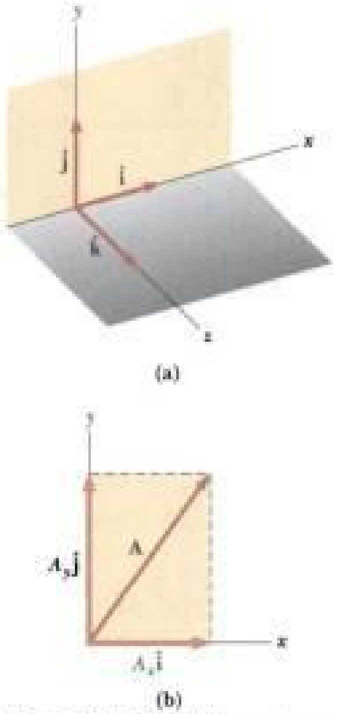


Figura activa 3.16 (a) Los vectores unitarios $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$, y $\hat{\mathbf{k}}$ están dirigidos a lo largo de los ejes x, y, y z, respectivamente. (b) El vector $\mathbf{A} = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}}$ que está en el plano xy tiene componentes A_x y A_y.

En el vínculo Active Figures en http://www.pse6.com, usted puede hacer girar los ejes de coordenadas en un espacio tridimensional y ver una representación del vector A en tres dimensiones.

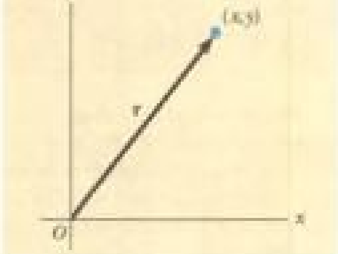


Figura 3.17 El punto cuyas coordenadas cartesianas son (x, y) puede ser representado por el vector de posición $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}}$.

Obtenemos la magnitud de **R** y el ángulo que forma con el eje x a partir de sus componentes, usando las relaciones

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(A_x + B_x)^2 + (A_y + B_y)^2} \tag{3.16}$$

$$\tan\theta = \frac{R_y}{R_x} = \frac{A_y + B_y}{A_x + B_x} \tag{3.17}$$

Podemos verificar esta adición por componentes con una construcción geométrica, como se ve en la figura 3.18. Recuerde que debe tomar nota de los signos de los componentes cuando use el método algebraico o el gráfico.

A veces necesitamos considerar situaciones que comprenden el movimiento en tres direcciones componentes. La extensión de nuestros métodos a vectores tridimensionales es sencilla. Si **A** y **B** tienen componentes x, y, y z, los expresamos en la forma

$$\mathbf{A} = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} + A_z\hat{\mathbf{k}} \tag{3.18}$$

$$\mathbf{B} = B_x\hat{\mathbf{i}} + B_y\hat{\mathbf{j}} + B_z\hat{\mathbf{k}} \tag{3.19}$$

La suma de **A** y **B** es

$$\mathbf{R} = (A_x + B_x)\hat{\mathbf{i}} + (A_y + B_y)\hat{\mathbf{j}} + (A_z + B_z)\hat{\mathbf{k}} \tag{3.20}$$

Nótese que la ecuación 3.20 difiere de la ecuación 3.14: en la ecuación 3.20, el vector resultante también tiene un componente z, $R_z = A_z + B_z$. Si un vector **R** tiene componentes x, y, y z, la magnitud del vector es $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$. El ángulo θ_x que **R** forma con el eje x se encuentra de la expresión $\cos\theta_x = R_x/R$, con expresiones similares para los ángulos con respecto a los ejes y y z.

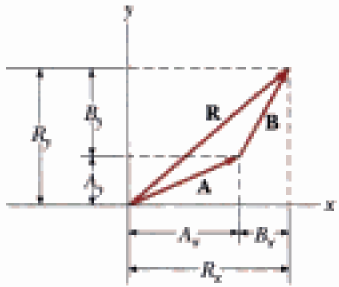


Figura 3.18 Esta construcción geométrica, para la adición de dos vectores, muestra la relación entre los componentes de la resultante **R** y los componentes de los vectores individuales.

Pregunta rápida 3.6 Si al menos un componente de un vector es un número positivo, el vector no puede (a) tener ningún componente que sea negativo (b) ser cero (c) tener tres dimensiones.

Pregunta rápida 3.7 Si $\mathbf{A} + \mathbf{B} = 0$, los correspondientes componentes de los dos vectores **A** y **B** deben ser (a) iguales (b) positivos (c) negativos (d) de signo contrario.

Pregunta rápida 3.8 ¿Para cuál de los siguientes vectores es la magnitud del vector igual a uno de los componentes del vector? (a) $\mathbf{A} = 2\hat{\mathbf{i}} + 5\hat{\mathbf{j}}$ (b) $\mathbf{B} = -3\hat{\mathbf{j}}$ (c) $\mathbf{C} = +5\hat{\mathbf{k}}$.

¡ADVERTENCIA!

3.3 Componentes *x* e *y*

Las ecuaciones 3.8 y 3.9 asocian el coseno del ángulo con el componente x y el seno del ángulo con el componente y. Esto es verdadero *sólo* porque medimos el ángulo θ con respecto al eje x, de modo que no se aprenda de memoria estas ecuaciones. Si θ se mide con respecto al eje y (como en algunos problemas), estas ecuaciones serán incorrectas. Piense en cuál lado del triángulo que contiene los componentes es adyacente al ángulo y cuál lado es opuesto, y asigne el coseno y seno de acuerdo con esto.

SUGERENCIAS PARA LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Adición de vectores

Cuando necesite adicionar dos o más vectores, use este procedimiento paso a paso:

- Seleccione un sistema de coordenadas conveniente. (Trate de reducir el número de componentes que necesite calcular, mediante la selección de ejes para alinear tantos vectores como sea posible).
- Trace un bosquejo con leyendas de los vectores descritos en el problema.
- Encuentre los componentes x e y de todos los vectores y los componentes resultantes (la adición algebraica de los componentes) en las direcciones x e y.
- Si es necesario, use el teorema de Pitágoras para hallar la magnitud del vector resultante y seleccione una función trigonométrica apropiada para hallar el ángulo que el vector resultante forme con el eje x.

¡ADVERTENCIA!

3.4 Tangentes y calculadoras

Generalmente, la función inversa de tangente en calculadoras da un ángulo entre −90° y +90°. En consecuencia, si el vector que el lector estudie se encuentra en el segundo o tercer cuadrante, el ángulo medido desde el eje positivo x será el ángulo que ejecute su calculadora más 180°.

Ejemplo 3.3 La adición de dos vectores

Encuentre la suma de dos vectores **A** y **B** que se encuentran en el plano *xy* y están dados por

$$\mathbf{A} = (2.0\hat{\mathbf{i}} + 2.0\hat{\mathbf{j}})\ \mathrm{m} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{B} = (2.0\hat{\mathbf{i}} - 4.0\hat{\mathbf{j}})\ \mathrm{m}$$

Solución Se pueden trazar los vectores para conceptualizar la situación. Este problema se puede clasificar por categoría como problema de sustitución. La comparación de esta expresión para **A** con la expresión general $\mathbf{A} = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}}$, vemos que $A_x = 2.0$ m y $A_y = 2.0$ m. De igual modo, $B_x = 2.0$ m y $B_y = -4.0$ m. Obtenemos el vector resultante *R* usando la ecuación 3.14:

$$\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = (2.0 + 2.0)\hat{\mathbf{i}}\ \mathrm{m} + (2.0 - 4.0)\hat{\mathbf{j}}\ \mathrm{m}$$
$$= (4.0\hat{\mathbf{i}} - 2.0\hat{\mathbf{j}})\ \mathrm{m}$$

o

$$R_x = 4.0\ \mathrm{m} \qquad R_y = -2.0\ \mathrm{m}$$

La magnitud de **R** se encuentra con la ecuación 3.16:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(4.0\ \mathrm{m})^2 + (-2.0\ \mathrm{m})^2} = \sqrt{20}\ \mathrm{m}$$
$$= \mathbf{4.5\ m}$$

Podemos hallar la dirección de **R** de la ecuación 3.17:

$$\tan\theta = \frac{R_y}{R_x} = \frac{-2.0\ \mathrm{m}}{4.0\ \mathrm{m}} = -0.50$$

Una calculadora pueda dar la respuesta –27° para $\theta = \tan^{-1}(-0.50)$. Esta respuesta es correcta si la interpretamos como 27° en el sentido dextrógiro desde el eje *x*. Nuestra forma estándar ha sido citar los ángulos medidos en sentido contrario al giro de las manecillas de un reloj desde el eje $+x$, y este ángulo para este vector es $\boldsymbol{\theta = 333°}$.

Ejemplo 3.4 El desplazamiento resultante

Una partícula experimenta tres desplazamientos consecutivos: $\mathbf{d}_1 = (15\hat{\mathbf{i}} + 30\hat{\mathbf{j}} + 12\hat{\mathbf{k}})$ cm, $\mathbf{d}_2 = (23\hat{\mathbf{i}} - 14\hat{\mathbf{j}} - 5.0\hat{\mathbf{k}})$ cm y $\mathbf{d}_3 = (-13\hat{\mathbf{i}} + 15\hat{\mathbf{j}})$ cm. Encuentre los componentes del desplazamiento resultante y su magnitud.

Solución Los desplazamientos tridimensionales son más difíciles de imaginar que los de dos dimensiones, porque estos últimos se pueden trazar en un papel. Para este problema, conceptualizaremos que el lector empieza con su lápiz en el origen de una hoja de papel de gráficas sobre la que ha trazado ejes *x* e *y*. Mueva su lápiz 15 centímetros a la derecha a lo largo del eje *x*, luego 30 centímetros hacia arriba a lo largo del eje *y*, y luego 12 centímetros *verticalmente alejándose* del papel de gráficas. Esto da el desplazamiento descrito por $\mathbf{d}_1$. De este punto, mueva su lápiz 23 centímetros a la derecha paralelamente al eje *x*, 14 centímetros paralelo al papel de gráficas en la dirección $-y$, y luego 5.0 centímetros verticalmente hacia abajo hacia el papel de gráficas. Está usted ahora en el desplazamiento desde el origen descrito por $\mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2$. Desde este punto, mueva su lápiz 13 centímetros a la izquierda en la dirección $-x$, y (¡finalmente!) 15 centímetros paralelo al papel de gráficas a lo largo del eje *y*. Su posición final está en un desplazamiento $\mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2 + \mathbf{d}_3$ desde el origen.

A pesar de la dificultad de conceptualizar en tres dimensiones, podemos *clasificar por categoría* este problema como un problema de sustitución, debido a los cuidadosos métodos de contabilidad que hemos creado para vectores. La manipulación matemática da seguimiento de este movimiento a lo largo de los tres ejes perpendiculares en una forma organizada y compacta:

$$\mathbf{R} = \mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2 + \mathbf{d}_3$$
$$= (15 + 23 - 13)\hat{\mathbf{i}}\ \mathrm{cm} + (30 - 14 + 15)\hat{\mathbf{j}}\ \mathrm{cm} + (12 - 5.0 + 0)\hat{\mathbf{k}}\ \mathrm{cm}$$
$$= (25\hat{\mathbf{i}} + 31\hat{\mathbf{j}} + 7.0\hat{\mathbf{k}})\ \mathrm{cm}$$

El desplazamiento resultante tiene componentes $R_x = 25$ cm, $R_y = 31$ cm, and $R_z = 7.0$ cm. Su magnitud es

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$$
$$= \sqrt{(25\ \mathrm{cm})^2 + (31\ \mathrm{cm})^2 + (7.0\ \mathrm{cm})^2} = \mathbf{40\ cm}$$

Ejemplo 3.5 De paseo

Una excursionista inicia un viaje al caminar primero 25.0 kilómetros al sureste desde su auto. Se detiene y arma su tienda de campaña para pasar la noche. Al segundo día, camina 40.0 kilómetros en una dirección 60.0° al norte del este, en cuyo punto descubre una torre de guardabosque.

(A) Determine las componentes del desplazamiento de la excursionista para cada día.

Solución *Conceptualizamos* el problema al trazar un dibujo como el de la figura 3.19. Si denotamos los vectores de desplazamiento en los días primero y segundo por **A** y **B**, respectivamente, y usamos el auto como el origen de coordenadas, obte- nemos los vectores que se muestran en la figura 3.19. Al trazar la resultante **R**, podemos ahora *clasificar por categoría* este problema como uno que ya resolvimos antes: una adición de dos vectores. Esto debe dar una sugerencia del poder de clasificar por categoría; muchos nuevos problemas son muy semejantes a problemas que ya hemos resuelto si tenemos el cuidado de clasificarlos por categoría.

Analizamos este problema al usar nuestro conocimiento de componentes vectoriales. El desplazamiento **A** tiene una magnitud de 25.0 kilómetros y está dirigido 45.0° abajo del eje *x* positivo. De las ecuaciones 3.8 y 3.9, sus componentes son

$$A_x = A\cos(-45.0°) = (25.0\ \mathrm{km})(0.707) = \mathbf{17.7\ km}$$

$$A_y = A\,\mathrm{sen}(-45.0°) = (25.0\ \mathrm{km})(-0.707) = \mathbf{-17.7\ km}$$

El valor negativo de A_y indica que la excursionista camina en la dirección *y* negativa el primer día. Los signos de A_x y A_y también son evidentes de la figura 3.19.

El segundo desplazamiento **B** tiene una magnitud de 40.0 km y es 60.0° al norte del este. Sus componentes son

$$B_x = B\cos 60.0° = (40.0\text{ km})(0.500) = \mathbf{20.0\text{ km}}$$

$$B_y = B\,\text{sen}\,60.0° = (40.0\text{ km})(0.866) = \mathbf{34.6\text{ km}}$$

(B) Determine las componentes del desplazamiento resultante **R** de la excursionista para el viaje. Encuentre una expresión para **R** en términos de unidades vectoriales.

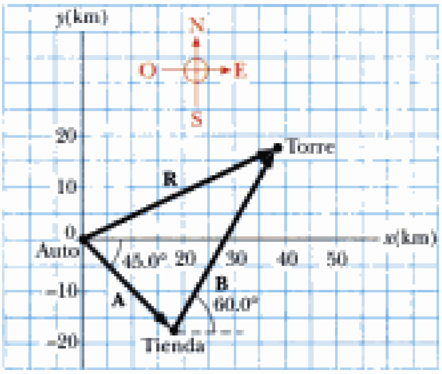


Figura 3.19 (Ejemplo 3.5) El desplazamiento total de la excursionista es el vector **R** = **A** + **B**.

Solución El desplazamiento resultante para el viaje **R** = **A** + **B** tiene componentes dados por la ecuación 3.15:

$$R_x = A_x + B_x = 17.7\text{ km} + 20.0\text{ km} = \mathbf{37.7\text{ km}}$$

$$R_y = A_y + B_y = -17.7\text{ km} + 34.6\text{ km} = \mathbf{16.9\text{ km}}$$

En forma de vectores unitarios, podemos escribir el desplazamiento total como

$$\mathbf{R} = (37.7\hat{\mathbf{i}} + 16.9\hat{\mathbf{j}})\text{ km}$$

Con las ecuaciones 3.16 y 3.17 encontramos que el vector **R** tiene una magnitud de 41.3 km y está dirigido 24.1° al norte del este.

Finalicemos. Las unidades de **R** son km, que es razonable para un desplazamiento. Si vemos la representación gráfica de la figura 3.19, estimamos que la posición final de la excursionista es de unos (38 km, 17 km), que es consistente con los componentes de **R** en nuestro resultado final. También, ambos componentes de **R** son positivos, poniendo la posición final en el primer cuadrante del sistema de coordenadas, que también es consistente con la figura 3.19.

Ejemplo 3.6 ¡Volemos!

Un avión para viajeros frecuentes toma la ruta que se muestra en la figura 3.20. Primero vuela desde el origen del sistema de coordenadas a la ciudad A, situada 175 km en una dirección 30.0° al norte del este. A continuación, vuela 153 km 20.0° al oeste del norte a la ciudad B. Finalmente, vuela 195 km al oeste a la ciudad C. Encuentre la ubicación de la ciudad C con respecto al punto de partida.

Solución Una vez más, un dibujo como el de la figura 3.20 nos permite *conceptualizar* el problema. Es conveniente escoger el sistema de coordenadas mostrado en la figura 3.20, donde el eje x apunta al este y el eje y apunta al norte. Denotemos los tres desplazamientos consecutivos por los vectores **a**, **b** y **c**.

Ahora podemos *clasificar por categoría* este problema como similar al ejemplo 3.5 que ya hemos resuelto. Hay dos diferencias principales. Primero, estamos adicionando tres vectores en lugar de dos. En segundo término, el ejemplo 3.5 nos guió al pedir primero los componentes en la parte (A). El presente ejemplo no tiene mucha guía y simplemente pide un resultado. Necesitamos *analizar* la situación y escoger una trayectoria. Seguiremos el mismo patrón que seguimos en el ejemplo 3.5, comenzando por hallar los componentes de los tres vectores **a**, **b** y **c**. El desplazamiento **a** tiene una magnitud de 175 km y los componentes

$$a_x = a\cos(30.0°) = (175\text{ km})(0.866) = 152\text{ km}$$

$$a_y = a\,\text{sen}(30.0°) = (175\text{ km})(0.500) = 87.5\text{ km}$$

El desplazamiento **b**, cuya magnitud es 153 km, tiene los componentes

$$b_x = b\cos(110°) = (153\text{ km})(-0.342) = -52.3\text{ km}$$

$$b_y = b\,\text{sen}(110°) = (153\text{ km})(0.940) = 144\text{ km}$$

Finalmente, el desplazamiento **c**, cuya magnitud es 195 km, tiene los componentes

$$c_x = c\cos(180°) = (195\text{ km})(-1) = -195\text{ km}$$

$$c_y = c\,\text{sen}(180°) = 0$$

Por lo tanto, los componentes del vector de posición **R** desde el punto de partida a la ciudad C son

$$R_x = a_x + b_x + c_x = 152\text{ km} - 52.3\text{ km} - 195\text{ km}$$

$$= \mathbf{-95.3\text{ km}}$$

$$R_y = a_y + b_y + c_y = 87.5\text{ km} + 144\text{ km} + 0 = \mathbf{232\text{ km}}$$

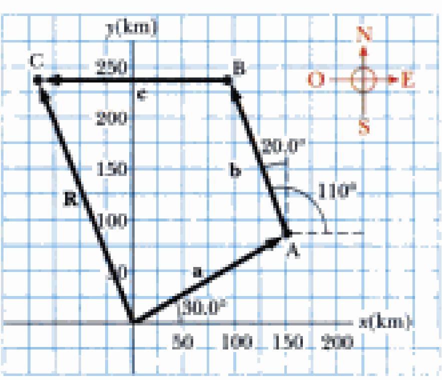


Figura 3.20 (Ejemplo 3.6) El avión sale del origen, vuela primero a la ciudad A, luego a la ciudad B y finalmente a la ciudad C.

En notación de vectores unitarios, $\mathbf{R} = (-95.3\hat{\mathbf{i}} + 232\hat{\mathbf{j}})$ km.

Con el uso de las ecuaciones 3.16 y 3.17 encontramos que el vector R tiene una magnitud de 251 km y está dirigido 22.3° al oeste del norte.

Para *finalizar* el problema, nótese que el avión puede llegar a la ciudad C desde el punto de partida al recorrer primero 95.3 km al oeste y luego recorrer 232 km al norte. O bien, podría seguir una trayectoria recta al punto C al volar una distancia $R = 251$ km en una dirección 22.3° al oeste del norte.

¿Qué pasaría si? Después de aterrizar en la ciudad C, el piloto desea regresar al origen a lo largo de una recta. ¿Cuáles son los componentes del vector que representa este desplazamiento? ¿Cuál debería ser el rumbo del avión?

Respuesta El vector deseado **H** es simplemente el negativo del vector **R**:

$$\mathbf{H} = -\mathbf{R} = (+95.3\hat{\mathbf{i}} - 232\hat{\mathbf{j}})\text{ km}$$

El rumbo se encuentra al calcular el ángulo que el vector hace con el eje x:

$$\tan\theta = \frac{R_y}{R_x} = \frac{-232\text{ m}}{95.3\text{ m}} = -2.43$$

Esto da un ángulo de rumbo de $\theta = -67.7°$, o 67.7° al sur del este.

RESUMEN

Las **cantidades escalares** son aquellas que tienen sólo un valor numérico y no tienen dirección asociada. Las **cantidades vectoriales** tienen magnitud y dirección y obedecen las leyes de la adición vectorial. La magnitud de un vector es *siempre* un número positivo.

Cuando se adicionan dos o más vectores, todos ellos deben tener las mismas unidades y todos deben ser el mismo tipo de cantidad. Podemos adicionar dos vectores **A** y **B** gráficamente. En este método (figura 3.6), el vector resultante $\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ corre de la cola de **A** a la punta de **B**.

Un segundo método de adicionar vectores incluye **componentes** de vectores. El componente A_x en las x del vector **A** es igual a la proyección de **A** a lo largo del eje x de un sistema de coordenadas, como se muestra en la figura 3.13, donde $A_x = A\cos\theta$. El componente A_y en las y del vector **A** es la proyección de **A** a lo largo del eje y, donde $A_y = A\text{ sen }\theta$. Debe el lector asegurarse de poder determinar cuáles funciones trigonométricas debe usar en todas las situaciones, en especial cuando θ se define como alguna cosa diferente al ángulo en sentido contrario al giro de las manecillas de un reloj desde el eje x positivo.

Si un vector **A** tiene un componente A_x en las x y un componente A_y en las y, el vector puede ser expresado en forma de vectores unitarios como $\mathbf{A} = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}}$. En esta notación, $\hat{\mathbf{i}}$ es un vector unitario que apunta en la dirección x positiva, y $\hat{\mathbf{j}}$ es un vector unitario que apunta en la dirección y positiva. Como $\hat{\mathbf{i}}$ y $\hat{\mathbf{j}}$ son vectores unitarios, $|\hat{\mathbf{i}}| = |\hat{\mathbf{j}}| = 1$.

Podemos hallar la resultante de dos o más vectores al resolver todos los vectores en sus componentes x e y, adicionando sus componentes resultantes x e y, y luego usar el teorema de Pitágoras para hallar la magnitud del vector resultante. Con el uso de una función trigonométrica apropiada, podemos hallar el ángulo que el vector resultante forma con respecto al eje x.

PREGUNTAS

1. Dos vectores tienen magnitudes iguales. ¿Puede su suma ser cero? Explique.
2. ¿Puede la magnitud del desplazamiento de una partícula ser mayor que la distancia recorrida? Explique.
3. Las magnitudes de dos vectores **A** y **B** son $A = 5$ unidades y $B = 2$ unidades. Encuentre los valores máximo y mínimo posibles para la magnitud del vector resultante $\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$.
4. ¿Cuáles de los siguientes son vectores y cuáles no lo son: fuerza, temperatura, el volumen de agua en una lata, el porcentaje de auditorio de un programa de TV, la altura de un edificio, la velocidad de un auto deportivo, la edad del universo?
5. Un vector **A** está en el plano xy. ¿Para qué orientaciones de **A** serán negativos sus dos componentes? ¿Para qué orientaciones tendrán signos opuestos sus componentes?